Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
6me série, Section des Sciences, t. X, nº 1.

Indledning i Læren

om

de grafiske Kurver

af

C. Juel.

Avec résumé en français.

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. X. 1.

Kjøbenhavn.

Hovedkommissionær: **Andr. Fred. Høst & Søn,** Kgl. Hof-Boghandel.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1899.

Pris: 2 Kr. 80 Øre.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

6te Række.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

		Kr.	Øre
	I, med 42 Tavler, 1880—85	29.	50.
1.	**Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880	»	65.
2.	**Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880	8.	50.
3.	**Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881	1.	35.
4.	**Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881	10.	»
5.	**Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881	2.	»
6.	**Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882	»	50.
7.	**Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882	1.	35.
8.	**Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882	1.	60.
9.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884	4.	35.
10.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884	1.	30.
11.	**Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français 1885	1.	85.
	II, med 20 Tavler, 1881—86	20.	»
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881	3.	15.
2.	**Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881	1.	30.
3.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882	5.	30.
4.	**Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883	1.	10.
5.	**Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883	»	60.
6.	**Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884	4.	»
7.	**Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885	»	80.
8.	**Traustedt, M. P. A.** Spolia atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885	3.	»
9.	**Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885	1.	»
10.	—— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886	1.	70.
11.	**Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886	2.	»
	III, med 6 Tavler, 1885—86	16.	»
1.	**Zeuthen, H. G.** Keglesnitslæren i Oldtiden. 1885	10.	»
2.	**Levinsen, G. M. R.** Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
3.	**Rung, G.** Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
4.	**Meinert, Fr.** De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886	6.	75.
	IV, med 25 Tavler. 1886—88	21.	50.
1.	**Boas, J. E. V.** Spolia Atlantica. Bidrag til Pteropodernes Morfologi og Systematik samt til Kundskaben om deres geografiske Udbredelse Med 8 Tavler. Résumé en français. 1886	10.	50.
2.	**Lehmann, A.** Om Anvendelsen af Middelgradationernes Metode paa Lyssansen. Med 1 Tavle. 1886	1.	50.
3.	**Hannover, A.** Primordialbrusken og dens Forbening i Truncus og Extremiteter hos Mennesket før Fødselen. Extrait en français. 1887	1.	60.
4.	**Lütken, Chr.** Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene». Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	60.
5.	—— Fortsatte Bidrag til Kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, særligt Slægten *Himantolophus*. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	75.
6.	—— Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne *Tursiops*, *Orca* og *Lagenorhynchus*. Med 2 Tavler. Résumé en francais. 1887	4.	75.
7.	**Koefoed, E.** Studier i Platosoforbindelser. 1888	1.	30.
8.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 3die Afhandling. Med 12 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1888	6.	45.

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

Indledning i Læren

om

de grafiske Kurver

af

C. Juel.

Avec résumé en français.

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. X. 1.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1899.

Indhold.

Forord.

Læren om grafiske Kurver er en Del af et stort og forholdsvis kun lidt bearbejdet Omraade af den rene Geometri. Herunder hører Læren om reelle Fladers Sammenhæng og desuden adskilligt andet, der nu findes spredt i forskjellige Dele af Mathematiken. Mest karakteristisk for alle disse Undersøgelser er, hvad det aksiomatiske Grundlag angaar, Opfattelsen af Punktet som det materielle Punkt. Den heri liggende Punktdefinition i Modsætning til Definitionen af Punktet som Grænsen for det lille Legeme vil man maaske være tilbøjelig til at antage for uvidenskabelig. En saadan Indvending staar ganske vist i Forbindelse med den græske Mathematiks fineste Tanker, men den er til Trods herfor, og skønt den her benyttede Definition medfører visse Vanskeligheder, dog utvivlsom ikke berettiget[1]).

Uvidenskabeligt er det kun at sammenblande de to Punktdefinitioner.

Det materielle Punkt har i den rene Geometri forøvrigt ingen anden fysisk Karakter, end at det er et tilstrækkelig lille Legeme, for hvilket Blyantsprikken er Type; lille er det i Forhold til de menneskelige Lemmer, det benyttede Tegnepapir o. s. v.

Fælles for hele dette Omraade er ligeledes en stærk Tilknytning til Figuren. Dog bør Henvisning til en saadan ikke uden videre benyttes som Bevis, thi ogsaa et øvet Øje kan ved en ugunstig Tegning ledes paa Vildspor; Beviserne bør ogsaa her føres gjennem logiske Udviklinger, der vel have en noget anden Karakter, men derfor ikke behøve at være mindre nøjagtige end paa andre mere analytiske Omraader. Det foreliggende Arbejde skulde ogsaa give Bidrag til denne logiske Bearbejdelse, men det er naturligvis ikke udelukket, at man paa enkelte Punkter kan komme videre i eksakt Beskrivelse, end her er sket. Jeg tænker f. Eks. paa den Paastand, at en Kurve af fjerde Orden kan have et ubegrænset d. v. s. kun ved Tegnemidlerne begrænset Antal af Infleksionspar; dog er der altid angivet de Buer, hvorpaa saadanne kunne findes, og de Betingelser, Vendetangenterne skulle tilfredsstille.

Simple Sætninger henhørende til de grafiske Kurvers Theori gaa vel langt tilbage —

[1]) Sé Forf.'s Note «Om Punktets Definition» i Nyt Tidsskrift for Mathematik 1896, S. 7.

allerede Newton opstiller jo Formerne for (algebraiske) Kurver af tredie Orden — men den første, der udtrykkelig har formuleret almindelige, men ikke nøjagtigt beviste Sætninger om grafiske Kurver, er vistnok Möbius (se Gesamm. Werke, Bd. II); til ham knytter sig v. Staudt (Geom. d. Lage § 12 og § 15). Fra en senere Tid maa jeg særlig fremhæve Prof. Zeuthens Afhandling om Udseendet af (algebraiske) Kurver af tredie og fjerde Orden[1]). Tidsskr. f. Mathematik 1873, S. 97; Mathematische Annalen Bd. 7, S. 410.

En Fremstilling fra nyere Tid haves i: Kneser, «Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten der ebenen Kurven», Math. Ann. Bd. 41, S. 349; her findes Beviser for de fleste af de her i § 3 fremsatte Sætninger og dertil enkelte andre.

Det følgende Arbejde skulde foruden at give en Række nye Sætninger tillige forsøge at ordne det bekjendte paa en mere systematisk Maade. Idet jeg væsentlig gjennemfører Læren om Kurver af tredie og fjerde Orden, haaber jeg tillige at have fremdraget i hvert Fald nogle af de Distinktioner, der i Almindelighed spille en Rolle ved grafiske Kurvers Diskussion.

I Afhandlingens § 1 har jeg først ganske kort præciseret Grundlaget og er herved uden nøjere Forklaring gaaet ud fra den Euclidiske Geometris Grundsætninger. Af Hensyn til Omprojektionerne maatte ellers adskilligt have været anderledes og mere fremmedartet. Jeg skal paa dette Sted tillige bemærke, at jeg i Overensstemmelse med hele Standpunktet ikke ser nogensomhelst Grund til for den grafiske Geometris Vedkommende at opstille særskilte Aksiomer, særlig ikke angaaende Eksistensen af, hvad man vil kalde en elementær Bue. En saadan er her simpelt hen en Del af en konveks Polygon med tilstrækkelig mange tilstrækkelig smaa Sider.

Iøvrigt er Hovedsagen i § 1 Beviset for det Princip, et specielt Korrespondanceprincip, der i det følgende hyppigt kommer til Anvendelse. Sætningen, der naturligvis ikke er af algebraisk men af kombinatorisk Natur, handler om en Korrespondens $(x^m y^n)$, hvor to sammenparrede Punkter x (eller y) ikke kunne falde sammen; af denne Betingelse følger dog ingenlunde, at Korrespondancen opløser sig i flere adskilte.

Vel er Principet — der naturligvis i mere eller mindre specielle Former ogsaa tidligere er brugt i spredte Tilfælde — i flere Henseender af stærkt begrænset Anvendelighed, men det er dog væsentlig ved at have det til Raadighed, at det er lykkedes mig at faa de typiske Former for de her behandlede Kurver udskilte.

[1]) Fra denne Afhandling stamme alle mine Forsøg i denne Del af Geometrien: de gaa i det Hele langt tilbage, og i Aaret 1893 gav jeg i et Foredrag i Math. Forening en Fremstilling af enkelte Resultater af det følgende.

Paa dette Sted skal jeg tillige bemærke, at jeg i det foreliggende Arbejde har benyttet nogle af Prof. Zeuthen i nævnte Afhandling indførte Benævnelser paa en anden Maade end Forf. Jeg haaber, at denne Note skal være tilstrækkelig til at hindre Forveksling.

I Afhandlingens § 2 behandler jeg først Kurverne af anden Orden. Det er af flere Grunde nødvendigt først at have disses Theori sikkret, særlig for at faa fast Grund under Fødderne ved Bestemmelsen af den elementære Bue.

Ved Beviserne for de almindelige men simple Sætninger i § 3 er man paa et Omraade, hvor det ovennævnte Korrespondanceprincip ikke direkte kan anvendes. Methoden er dog for saavidt den samme, som de betragtede Korrespondenser mellem Kurvepunkt og dettes Tangentialpunkt ved tilbørlig Begrænsning af Omraadet gjøres éntydige.

De sidste Sætninger i dette Afsnit ere de bekjendte om Kurver af lige og ulige Orden. Mest Interesse har vel her Beviserne for Zeuthens Sætning om Kurver, som begrænse, eller ikke begrænse, en Del af Planen.

Den næste § 4 behandler Kurverne af tredie Orden, der med de udviklede Hjælpemidler ere lette at beherske. Interessant og karakteristisk for grafiske Kurver i Modsætning til algebraiske er det, at en fuldstændig kontinuert Kurve, der har 3 Vendetangenter og ingen andre Singulariteter, nødvendigvis er af tredie Orden. Først ved denne Sætning faar forøvrigt Theorien for disse Kurver en relativ Afslutning, thi først den giver en fuldstændig Beskrivelse af Kurven. Jeg slutter med Bestemmelsen af de Kurver af 3die Orden, der have fremspringende Punkter. Dels ere de, saa vidt jeg ved, ikke før karakteriserede, dels er det nødvendigt at have disse Former til sin Raadighed, naar Typerne for Kurverne af fjerde Orden skulle opstilles.

Det sidste og største Afsnit behandler Kurverne af fjerde Orden. Interesse vil denne Undersøgelse ogsaa have for de algebraiske Kurvers Theori, da der, saa vidt jeg ved, ikke noget Steds findes en klassificerende Bestemmelse af alle mulige Former for den enkelte Gren af en Fjerdegradskurve; at hver enkelt Form vil kunne findes mange Steder, er jo en anden Sag. Kun de Kurver, der have tre Dobbeltpunkter, ere fuldt oplyste fra Formens Side, jfr. en Afhandling af A. Brill, Über rationale Curven vierter Ordnung (mit zwei lith. Tafeln), Math. Annalen Bd. 12, S. 90.

Opgaven er her for saa vidt en anden og snevrere end i Læren om de algebraiske Kurver, som man paa dette Sted ret naturligt — af de i Afh. nævnte Grunde — indskrænker sig til Kurver med en enkelt Gren; en Udvidelse heraf maatte i hvert Fald kræve særlige nye Begrænsninger. Paa den anden Side viser Afvigelsen fra de algebraiske Kurver sig deri, at her kan Antallet af Dobbelttangenter, Vendetangenter og Dobbeltpunkter hver for sig vokse over alle Grænser. Saa meget desto naturligere har det været at søge en Relation mellem disse Tal. En saadan, der er aldeles almengyldig, eksisterer nu ganske vist ikke, men følgende Sætning nærmer sig stærkt dertil: «En Kurve af fjerde Orden behøver ikke at have Dobbelttangenter, men har den saadanne, vil disses Antal være lig med Antallet af Dobbeltpunkter forøget med det halve Antal af Infleksionspunkter».

Begyndelsen gjøres naturligvis med Kurver uden Dobbeltpunkter. At den nøjagtige Formulering af Beviset for de af Prof. Zeuthen fremhævede indadgaaende Buer med Infleksionspar trods al anvendt Stræben efter Korthed dog tager nogen Plads, lader sig vist neppe undgaa. Tilmed skal jeg bemærke, dels at det fundne Resultat jo stadig kommer til Anvendelse i det følgende, dels at den omvendte Sætning, nemlig at der ikke paa Kurven kan findes andre (her saakaldte isolerede) Infleksionspunkter, paa ingen Maade er umiddelbart øjensynlig.

Har Kurven Dobbeltpunkter, vil der gjennem hvert saadant gaa enten ingen eller to Tangenter, der berøre udenfor Dobbeltpunktet (hvor Tangenterne i dette ere antagne ikke at være Vendetangenter); Dobbeltpunkterne ere i Overensstemmelse hermed enten af «første Art» eller af «anden Art». Nu bygges Diskussionen væsentligt derpaa, at alle Dobbeltpunkterne i Almindelighed ere af samme Art. Der findes imidlertid en karakteristisk Undtagelse, idet de ikke behøve at være af samme Art, naar Kurven har tre Dobbeltpunkter. Mit Arbejde blev her noget standset ved, at jeg i Anledning af denne Undtagelse først prøvede paa at samle de Kurver, hvor Dobbeltpunkterne ikke ere af samme Art, i èn Hovedtype, men herved viste det sig snart, at væsentlig forskjellige Former bleve satte sammen. Al Vanskelighed forsvinder imidlertid, naar man som en af Hovedtyperne vælger den, hvor Kurven kan sammensættes af Grene af ulige (her tredie) Orden. Man kan derefter let a posteriori bevise, at de nævnte specielle Kurver med 3 Dobbeltpunkter alle maa findes i denne Type.

Om Resultatet i det Hele og Store kan man sige, at der til Trods for tydelige Afvigelser fra de algebraiske Kurvers Figurer, dog allerede mellem disse findes de væsentlige Typer ogsaa for de ikke algebraiske Kurver af fjerde Orden, noget man paa Forhaand paa ingen Maade kunde være sikker paa.

§ 1.

Indledning; det grafiske Korrespondanceprincip.

De grafiske Kurver ere krumme Linier, der enten blot foreligge i en Tegning af sammenføjede, sammenhængende — kontinuerte — Buer, eller ere dannede ved Sammenføjning af perspektiviske Projektioner af et vist Antal saaledes tegnede Buer.

En kontinuert Bue dannes af en Sukcession af tilstrækkelig nær paa hinanden følgende Punkter, der ligge saaledes, at ethvert Punkt i et tilstrækkelig lille omgivende Omraade har to og kun to Nabopunkter, der ikke gribe ind i det første Punkts Omraade: et foregaaende og et efterfølgende. Ved Punkt forstaas her det materielle Punkt, for hvilket Blyantsspidsen kan betragtes som Type. Naar Punktmængden er bestemt saaledes, at de Linier, der forbinde et Punkt M med dets to Nabopunkter i Forhold til den Nøjagtighed, hvormed hele Tegningen er udført, kunne betragtes som sammenfaldende, kaldes den ene eller den anden af disse Linier for Kurvens Tangent i M. Den i Tangentdefinitionen liggende Ubestemthed er ikke til at undgaa og findes under forskjellige Former overalt i denne Del af Geometrien. Væsentlig er denne Opfattelse af Buen sammenfaldende med at opfatte den som en brudt Linie, dannet af tilstrækkelig mange og tilstrækkelig smaa Liniestykker, eller, som vi hellere ville sige — idet vi tænke paa den senere Indførelse af den elementære Bue — vi antage enhver her betragtet Bue sammensat af Dele af konvekse Polygoner med tilstrækkelig smaa Sider. Ere A, B, C, D . . Punkter, der i denne Orden følge paa hinanden, er Reglen den, at man opfatter AB, BC, CD . . som paa hinanden følgende Tangenter; Røringspunktet bliver derved Skæringspunkt mellem paa hinanden følgende Tangenter.

Det er muligt, at der forekommer enkelte Undtagelsespunkter, hvor Forbindelseslinierne med det foregaaende og det efterfølgende Punkt ikke kunne opfattes som sammenfaldende, men danne — hvad man ogsaa her vil kalde — en endelig Vinkel med hinanden. Saadanne Punkter siges at være fremspringende. Som «en uegentlig Tangent» i et fremspringende Punkt O betragtes enhver saadan Linie gjennem O, der er Nabolinie til en ret Linie, der skærer Kurven i to ved O nærliggende Punkter. Har en Bue ikke fremspringende Punkter, og er ingen endelig Del af Buen retliniet, er den kontinuerte Bue ogsaa kontinuert som Tangentfrembringelse og skal for Kortheds Skyld i det følgende kaldes fuldstændig kontinuert.

Paa Grund af de dualistisk tilsvarende Bestemmelser af Tangent og Røringspunkt kan man paa Sætninger om fuldstændig kontinuerte Buer anvende Dualitetsprincipet. Vi stille os endvidere i det følgende paa et projektivt Standpunkt, saa at en Bue godt kan være kontinuert, selv om den gaar i det uendelige, nemlig naar den (eller hver Del af den) ved en Projektion kan omformes til en kontinuert Bue, der helt ligger i det endelige.

I det følgende holde vi os væsentlig til lukkede Kurver, hvor et bevægeligt Punkt kan overskride alle Kurvens Punkter fra en Begyndelsesstilling tilbage til dette uden noget Steds at gjøre et Spring. En Kurve kan naturligvis i sædvanlig projektiv Forstand være lukket, selv om den gaar i det uendelige.

Vi ville nu betragte Forbindelsen mellem sammenhørende bevægelige Punkter paa en lukket Kurve, og kunne herved — som senere skal forklares nøjere — holde os til en ret Linie, der jo er lukket gjennem det uendelige.

Et Punkt ville vi lade gjennemløbe Linien kontinuert, hvorved blot skal forstaas, at paa hinanden følgende Stillinger skulle kunne bringes til at ligge saa nær ved hinanden, som de forhaandenværende Tegnemidler tillade. Paa tilsvarende Maade skal det forstaas, at Forbindelsen mellem Punkter X og tilsvarende Punkter Y siges at være kontinuert.

Et Punkt kan nu gjennemløbe Linien i to Retninger. Retningen eller Punktets Løb er bestemt ved Angivelsen af tre Punkter A, B, C af Linien, der skulle overskrides i den opskrevne Orden.

Lad os nu betragte en saadan kontinuert Afhængighed mellem Punkter X og Y paa samme rette Linie — eller forskjellige rette Linier — at der til hvert Punkt af Linien opfattet som et Punkt X svarer et og kun ét Punkt Y, og omvendt. Til et bestemt Løb for Punktrækken (X) maa der da svare et bestemt Løb for (Y). Naar nemlig X gjennemløber sin Linie stadig i en og samme Retning, men Y i en Stilling Y_1, svarende til en Stilling X_1 af X, vendte om, og nu gjennemløb et Stykke af Linien i den modsatte Retning, maatte den træffe Punkter, hvor den før havde været, og til hvert af disse Punkter Y vilde der da svare to Punkter X mod Forudsætningen. Man faar derved:

(1) I en kontinuert gjensidig éntydig Afhængighed kan man ikke vælge flere end tre Par tilsvarende Elementer vilkaarligt.

Man kan nemlig ikke lade A, B, C, D svare henholdsvis til A_1, B_1, C_1, D_1, saafremt ABC og ABD bestemme samme, $A_1B_1C_1$ og $A_1B_1D_1$ modsatte Løb. Selve Afhængigheden er naturligvis ikke bestemt uden ved Angivelsen af alle Par af tilsvarende Punkter.

Lad os nu udtrykkelig antage, at de to Punktrækker ligge paa samme rette Linie, og endvidere, at tilsvarende Løb ere modsatte. Naar da X gjennemløber hele Linien én Gang fra en Begyndelsesstilling A tilbage til A, maa Y ogsaa have gjennemløbet Linien netop én Gang — ellers vilde Afhængigheden ikke overalt være éntydig. Punktet X maa derfor have truffet sit tilsvarende Punkt Y netop to Gange ɔ:

I en kontinuert og gjensidig éntydig Punktafhængighed paa en ret Linie, hvor tilsvarende Løb ere modsatte, vil der findes netop to Punkter, der svare til sig selv. (2)

Løbe tilsvarende Punkter samme Vej, kan Antallet af Fællespunkter blive saa stort, det skal være. Man kan dog sige, at Antallet af Fællespunkter i hvert Fald er lige, naar man blot erindrer at regne et saadant Sammenfald to Gange med, hvor X falder sammen med Y, men ogsaa efter Sammenfaldet holder sig paa samme Side af det tilsvarende Punkt.

Lad os nu antage, at der paa en ret Linie findes en kontinuert Afhængighed mellem Punkter X og Punkter Y, saaledes at der til hvert Y svarer ét Punkt X, men til hvert X n Punkter Y: Y^1, $Y^2, \ldots. Y^n$. Lad os tillige forudsætte, at to sammenhørende Punkter Y, d. v. s. Punkter, der svare til samme X, ingensinde falde sammen. Af disse Forudsætninger følger allerede, at der til et bestemt Løb af X svarer et bestemt Løb af Y, men vi ville yderligere antage, at disse tilsvarende Løb ere modsatte og spørge da om Antallet af Fællespunkter. Da der under vore Forudsætninger i hvert Fald maa være mindst ét Fællespunkt, kunne vi gaa ud fra, at Punktet X gjennemløber hele Linien én Gang ud fra et Fællespunkt $X_0 = Y_0^1$. De øvrige til X_0 hørende Punkter være Y_0^2, $Y_0^3 \ldots. Y_0^n$, hvor Betegnelserne ere valgte saaledes, at X under sin Bevægelse først kommer til Y_0^2, dernæst til Y_0^3 o. s. v. Naar X atter er falden i X_0, vil den tilsvarende Gruppe Y dække sig selv, men deraf følger ikke, at hvert Punkt Y for sig — man kan jo følge Bevægelsen af hvert enkelt saadant Punkt — atter vil falde i sin oprindelige Stilling. Man kan endogsaa let se, at dette ikke er muligt; da nemlig to sammenhørende Punkter Y ikke kunne falde sammen, maa Følgeordenen i hvert Fald være den samme, som før, saa at hvert Punkt Y maa falde i sin oprindelige Stilling, naar ét Punkt gjør det. Men naar $Y^1 Y^2 ..$ skulde falde i $Y_0^1 Y_0^2 ..$, maatte hvert af disse Punkter under X's hele Bevægelse have gjennemløbet hele Linien en eller flere Gange, og altsaa hvert enkelt for sig have overskredet et fast vilkaarligt Punkt M af Linien mindst én Gang. Men til Punktet $Y = M$ maatte der da svare mindst n Punkter X mod Forudsætningen. Man kan derimod vise, at Y_0^1 netop maa falde i Y_0^n. Hvis nemlig Y_0^1 faldt f. Ex. i Y_0^{n-1}, saa vilde Y_0^n falde i Y_0^{n-2}, og naar X nu gjennemløber hele Linien i Retningen $Y_0^1 Y_0^2 Y_0^3 \ldots$, saa vil derved baade Punktet Y^1 og Punktet Y^n have gjennemløbet Liniestykket $Y_0^n Y_0^{n-1}$ (det, der ikke indeholder de andre sammenhørende Punkter Y), saa at der til hvert Punkt af dette Stykke kom til at svare to Punkter X mod Forudsætningen. Den Ombytning mellem Y's Punkter, der udføres ved, at X gjennemløber hele Linien én Gang i den angivne Retning, er som man paa den Maade ser, nødvendigvis

$$\begin{pmatrix} Y^1 Y^2 Y^3 \dots Y^n \\ Y^n Y^1 Y^2 \dots Y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Naar X nu gjennemløber Intervallet $Y_0^1 Y_0^2$, vil det én Gang træffe Y^2, ved at gjennemløbe $Y_0^2 Y_0^3$, én Gang træffe Y^3 o. s. v.; i alt kommer der paa denne Maade svarende til de n Intervaller mellem paa hinanden følgende Punkter Y netop n Fællespunkter, altsaa tilsammen med A netop $n + 1$.

Dette Resultat faas iøvrigt nok saa simpelt ved at lade Y gjennemløbe hele Linien én Gang, thi derved vil, som man let ser, det tilsvarende Punkt X gjennemløbe Linien netop n Gange. Det førte Bevis er imidlertid medtaget, da Beviset for den følgende Sætning derved kan føres saa meget desto kortere.

(3) Paa en ret Linie findes en kontinuert Afhængighed mellem Punkter X og Y, saaledes at der til hvert Punkt X svarer p Punkter Y og til hvert Punkt Y q Punkter X (vi antage $p > q$). Tillige skulle hverken to sammenhørende Punkter X eller to sammenhørende Punkter Y kunne falde sammen.

Heraf følger allerede, at naar X gjennemløber et Liniestykke i en bestemt Retning, da ogsaa Y vil gjøre det, men vi forudsætte yderligere, at de to Omløbsretninger ere modsatte.

Der vil da findes $p + q$ Fællespunkter.

Der vil nemlig efter Forudsætningerne existere mindst ét Fællespunkt A, og vi kunne tænke os, at Punktet X gjennemløber hele Linien ud fra $A = X_0^1 = Y_0^1$ gjennem de paa hinanden følgende Punkter $Y_0^2 Y_0^3 \dots . Y_0^p$ tilbage til A. Efter Omløbet skal Y-Gruppen dække sig selv, saaledes at dens Følgeorden er bleven uforandret. Men da der til Punktet Y_0^p som til ethvert andet Y-Punkt af Linien skal svare q Punkter X, maa der gjennem dette Punkt have forskudt sig de $q - 1$ Punkter: $Y^1 Y^2 \dots . Y^{q-1}$, og heller ikke flere. Naar X atter kommer tilbage til A, maa Y^{q-1} altsaa netop være falden i Y^p. Den ved Omløbet bestemte Substitution er altsaa

$$\begin{pmatrix} Y_0^1 & Y_0^2 & \dots Y_0^{q-1} & Y_0^q \; Y_0^{q+1} \dots Y_0^p \\ Y_0^{p-q+2} & Y_0^{p-q+3} & \dots Y_0^p & Y_0^1 \; Y_0^2 \dots . Y_0^{p-q+1} \end{pmatrix}.$$

Intet af Punkterne Y kan X under sin Bevægelse møde flere end to Gange, men nogle af dem vil det kun møde én Gang. I Henhold til nysnævnte Skema vil X nu møde hvert af Punkterne $Y^1 Y^2 \dots Y^q$ to Gange (hvorved Punktet A allerede er medregnet), men hvert af de øvrige Punkter $Y^{q+1} \dots Y^p$ kun én Gang. Fællespunkternes Antal er altsaa

$$2q + p - q = p + q.$$

Hertil kan føjes følgende Bemærkninger:

1) Naar det forlanges, at et Punkt Y stadig skal bevæge sig i samme Retning og i modsat Retning af X, forhindrer dette ikke, at Hastigheden et Steds kan være uendelig lille, d. v. s. at et Punkt Y kan ligge stille, medens det tilsvarende Punkt bevæger sig et endeligt Stykke.

2) Den Betingelse, at to sammenhørende Punkter Y ikke maa falde sammen, er ikke i alle Tilfælde ubetinget nødvendig. Vi ville her nøjes med at bevise, at Sætningen bevarer sin Gyldighed, naar to sammenhørende Punkter Y i et Punkt $A = X_0^1 = Y_0^1 = Y_0^2$ falder sammen med et tilsvarende Punkt X. I saa Fald vil der nemlig for det første ogsaa i A falde ét Punkt Y sammen med to tilsvarende Punkter X. Denne Paastand er ikke gyldig for enhver Korrespondens, men den gjælder her, hvor tilsvarende Punkter X og Y bevæge sig i modsatte Retninger. Vælge vi nemlig et Punkt $B = Y$ meget nær ved A og f. Eks. tilvenstre for A, og lade vi X bevæge sig ud fra A tilhøjre, ville de to tilsvarende Punkter Y, der oprindelig befandt sig i A, bevæge sig tilvenstre, og de maa altsaa begge overskride B, medens X endnu er i Nærheden af A ɔ: til Punktet $B = Y$ svarer to Punkter X, der konvergere med A, naar B gjør det.

Lad der nu til Punktet $A = X_1^1 = Y_0^1 = Y_0^2$ foruden A svare $p - 2$ Punkter Y og $q - 2$ Punkter X, og lad et Punkt X bevæge sig én Gang langs Linien fra A tilbage til A. Et Raisonnement, der i intet væsentligt er forskjelligt fra det forrige, vil da vise, at Antallet af Sammenfaldspunkter udenfor A er

$$2(q-2) + (p-q+2) = p+q-2.$$

Sætningen vedbliver altsaa at gjælde, naar A regnes to Gange med.

Det er væsentlig denne grafiske Korrespondensformel — en Sætning, der forøvrigt er af kombinatorisk og ikke af algebraisk Karakter — vi i det følgende ville bruge paa lukkede Kurver. En saadan kan nemlig altid gjensidig éntydig og kontinuerlig afbildes paa en Cirkels Periferi og derigjennem (f. Ex. ved stereografisk Projektion) paa en ret Linie. Dette er klart, naar Kurven ligger helt i det endelige, da der i saa Fald maa findes en Cirkel med samme Omkreds, og efter at man har valgt et Punkt A paa Kurven og et Punkt A_1 paa Cirklen, kan man lade M og M_1 svare til hinanden, naar $\smile AM = \smile A_1 M_1$.

Det samme er Tilfældet, selv om Kurven indeholder Buer, der gaa i det uendelige, thi hver af disse behøver man blot ved en b e s t e m t men forøvrigt selvvalgt Projektion at reducere til en endelig. Ad denne Vej ses det f. Ex. tydeligt, at et Dobbeltpunkt skal regnes for to forskjellige Punkter, eftersom det henregnes til den ene eller den anden af de derigjennem gaaende Buer. Ligeledes ses det, at et vilkaarligt System af Kurver altid gjensidigt entydig og kontinuerlig kan afbildes paa et andet, saafremt blot Antallet af Kurver er det samme i begge Systemer. Noget andet direkte Analogon til Slægtssætningen existerer altsaa ikke for grafiske Kurver.

§ 2.
Kurven af anden Orden; den elementære Bue.

Vi ville nu gaa over til Kurverne og begynde med Kurven af anden Orden G^2 d. v. s. en lukket kontinuert Kurve, der af en vilkaarlig ret Linie højst skjæres i to Punkter. En Tangent skærer i to paa hinanden følgende Punkter og kan da ikke yderligere skære Kurven. Naar et Punkt M ud fra en Begyndelsesstilling A gjennemløber Kurven tilbage til A, maa Linien AM derfor stadig bevæge sig i samme Retning ud fra Tangenten a i A og tilbage til samme Tangent. Enhver ret Linie, der skærer en G^3 i ét Punkt, maa derfor skære i endnu et.

Drejer man en Tangent a om et af sine Punkter (dog ikke Røringspunktet A) til én Side, saa faas en Linie, der ikke skærer Kurven; drejer man derimod til den anden Side, saa optræde adskilte Skæringspunkter, der i hvert Fald til at begynde med bevæge sig i modsatte Retninger paa Kurven[1]. Det samme er Tilfældet, naar en bevægelig ret Linie p, der i en af sine Stillinger berører G^2, i Stedet for at dreje sig om et fast Punkt ruller videre paa en anden Kurve af anden Orden G_1^2, thi denne Bevægelse er i det første Øjeblik intet andet end en lille Drejning om et Punkt (Røringspunktet med G_1^2).

Forbindes alle Kurvens Punkter med to faste Punkter A og B af Kurven, faas to gjensidig éntydigt forbundne Liniebundter. Den foregaaende Sætning (1) i § 1 giver da:

(1) Af en Kurve af anden Orden kunne ikke flere end 5 Punkter vælges aldeles vilkaarligt. (Dette gjælder f. Ex. om Perimetren af en konvex Polygon.)

Kurven er natuligvis først bestemt ved alle sine Punkter.

Sætningen kan ikke vendes om, idet to entydigt og kontinuerligt sammenparrede Liniebundter kunne frembringe en Kurve af vilkaarlig høj (lige) Orden. En saadan Kurve vil dog skæres i to og kun to Punkter af enhver ret Linie, som skærer enten det ene eller det andet af de to Liniestykker, der bestemmes ved Liniebundternes Centrer.

(2) Kurven af anden Orden er ogsaa af anden Klasse d. v. s. gjennem et vilkaarligt Punkt P af Planen gaar højst to Tangenter til Kurven. Forbindes nemlig P med et vilkaarligt Punkt X af G^2, vil Linien endnu skære Kurven i et Punkt Y, og Forbindelsen mellem Punkterne X og Punkterne Y er gjensidig éntydig. I Fald der nu

[1] Denne og de øvrige her følgende Sætninger have ikke aksiomatisk Karakter, naar man erindrer at opfatte Kurven G^2 som en overalt konveks Polygon.

gjennem P gaar én Tangent til Kurven, ville X og Y i Nærheden af dennes Røringspunkt og altsaa overalt gaa i modsat Retning, saa at der netop findes to Sammenfald ɔ: to Tangenter fra P. I saa Fald siges P at ligge udenfor Kurven (og Buen), eller naar P ligger nær ved Buen, at ligge paa dennes positive Side (medens P ellers ligger indenfor Kurven og paa Buens negative Side).

I Beviset have vi egentlig ikke forudsat, at Kurven ogsaa er kontinuert som Tangentfrembringelse. I Fald dette ikke er Tilfældet, skulle vi blot regne enhver Linie gjennem et fremspringende Punkt, der ikke yderligere skærer Kurven, med mellem Tangenterne, om end som en uegentlig Tangent. Dette Synspunkt spiller særlig en Rolle, naar man vil anvende vore Sætninger paa en brudt Linie, hvor hver Vinkelspids er et fremspringende Punkt.

Ligger P paa en fuldstændig kontinuert Kurve, blive de to Tangenter paa hinanden følgende (om man vil, sammenfaldende); ellers ligge de to Røringspunkter i en vis Afstand fra hinanden. Overskrider P Kurven, tabes eller vindes to fra P udgaaende Tangenter eftersom man gaar fra Buens positive til dens negative Side eller omvendt.

Naar m i et Punkt M af G^2 skærer en Bue af en anden Kurve af anden Orden i N, og naar Buen og G^2 hverken have noget Punkt eller nogen Tangent fælles, vil N bevæge sig i en bestemt Retning paa Buen, naar M bevæger sig i en bestemt Retning paa G^2. Hvis nemlig N vendte om i Q, vilde der gjennem et Punkt meget nær ved Q gaa to Tangenter, der vare meget nær ved at falde sammen, hvilket ikke kan være Tilfældet, da Q efter Forudsætningen ikke kan være meget nær ved G^2. Det forudsættes herved, at ingen af de betragtede Tangenter m gaar gjennem Buens Endepunkter. Naar en Tangent m til G^2 skærer Buen i et Punkt N, maa en Nabotangent til m skære i et Nabopunkt til N, med mindre m enten er en fælles Tangent eller gaar gjennem et Endepunkt af Buen. Det tilsvarende kan siges om Skæringspunkterne mellem Tangenterne m til en Bue AB af en G^2 og en ret Linie p, som ikke skærer eller berører Buen (men eventuelt kan indeholde dennes Endepunkter). Naar M gjennemløber Buen i en bestemt Retning fra A til B, vil $N = (mp)$ stadig bevæge sig i en bestemt Retning paa et Stykke af Linien, der er begrænset af Skæringspunkterne A_1 og B_1, mellem p og Buens Endetangenter. Gjennem intet Punkt af det andet af A_1 og B_1 begrænsede retliniede Stykke gaar altsaa nogen Tangent til Buen.

Om Kurver af anden Orden kan man ved Korrespondenssætningen bevise en Del Sætninger af speciel Karakter. Jeg nævner følgende:

Drages gjennem et Punkt P udenfor en G^2 rette Linier, der skære denne i to Punkter X og Y, vil Skæringspunktet mellem Tangenterne i saaledes sammenhørende Punkter gjennemløbe en Kurve, der skæres i ét og kun et Punkt af enhver ret Linie, der ikke har noget Punkt fælles med G^2.

Denne Sætning har i og for sig ingen videre Betydning, men dens Bevis frembyder nogen Interesse, hvorfor det her kort skal skizzeres.

Man skal betragte den undtagelsesløs 2—2-tydige Korrespondens mellem de Punkter X_1 og Y_1, hvori Linien l skæres af Kurvens Tangenter i X og Y. Her har det ikke nogensomhelst Vanskelighed at bevise, at et Punkt X_1 og et tilsvarende Y_1 altid løbe i modsat Retning, saafremt Linien ikke skærer Kurven, men der kommer den Mærkelighed, at ethvert Sammenfald, der virkelig giver en Løsning paa den stillede Opgave, ifølge Konstruktionen maa regnes dobbelt.

Da der nu i Korrespondensen findes to enkelte Sammenfald, der her give fremmede Løsninger, nemlig Skæringspunkterne mellem Linien og de to Tangenter, der udgaa fra P, har man foruden disse efter den almindelige Theori ét men ogsaa altid ét Dobbeltsammenfald, der giver én virkelig Løsning (se 2) S. 13).

Endvidere: Den Opgave, i en Kurve af anden Orden at indskrive en Polygon, hvis Sider gaa gjennem hver sit givne Punkt i Planen, har altid to og kun to Løsninger, naar et ulige Antal af de givne Punkter ligge udenfor Kurven; ellers kan Antallet eventuelt være et vilkaarligt lige Tal (nul indbefattet).

Lad os nu betragte to Kurver G^2 og G_1^2 af anden Orden, der ikke have noget Punkt fælles. Det er da muligt, at de heller ikke have nogen Tangent fælles. Hvis de have én saadan, vil Røringspunktet A mellem den fælles Tangent a og G^2 ligge udenfor G_1^2. Fra alle Punkter af G^2 vil der altsaa gaa to Tangenter til G_1^2. Lad os nu fra et Punkt X af G^2 drage en Tangent til G_1^2, og lad den skære G^2 anden Gang i Y. Forbindelsen mellem X og Y er da 2—2-tydig og tilfredsstiller i Henhold til ovenstaaende Bemærkninger de øvrige Betingelser for, at Korrespondenssætningen kan bruges. Man har altsaa:

To Kurver af anden Orden, der ikke skære hinanden, ville have 0 eller 4 fælles Tangenter.

Ligger hver af Kurverne udenfor den anden, maa der altid findes 4 Fællestangenter, thi i saa Fald maa de to Skæringspunkter mellem G^2 og en bevægelig Tangent til G_1^2 i et lille Øjeblik og altsaa til Stadighed gaa i modsatte Retninger, saa at der findes mindst én fælles Tangent.

Dualitetsprincipet kan naturligvis anvendes.

For at finde en almindeligere Relation mellem Antallene af fælles Punkter og fælles Tangenter til Kurver af anden Orden, ville vi først betragte det Tilfælde, at Kurverne have to og kun to Punkter fælles; de maa da nødvendigvis have fælles Tangenter, thi ellers vilde der findes ingen eller fire Skæringspunkter efter den nysnævnte Sætning. Da man derfor altid kan finde Linier, der ikke skære nogen af Kurverne, kan man, i alt Fald efter en Omprojektion, gaa ud fra, at begge Kurver ligge helt i det endelige. I Virkeligheden benyttes dette dog kun til Afkortning af Udtrykkene, idet man ellers i Stedet for at sige: «det endelige Liniestykke AB», maatte sige: «det ved A og B begrænsede Liniestykke, der ikke indeholder noget Punkt af en bestemt fælles Tangent».

Lad nu de to Kurver være α og β, der skære hinanden i A og B (se Fig. 1). Ved disse Punkter deles Kurven i to Buer henholdsvis α_1 og α_2, β_1 og β_2, hvor Betegnelserne vælges saaledes, at α_1 ligger udenfor β, og β_1 udenfor α. Buerne α_1 og β_2 begrænse da et endeligt bestemt Omraade ω, hvis Begrænsning $\alpha_1 + \beta_2 = \lambda$ i A og B har fremspringende Punkter. Enhver ret Linie maa skære den helt i det endelige liggende Kontur λ i et lige Antal Punkter, hvilket vi udtrykke ved at sige, at λ er af lige Orden.

Idet vi stadig gaa ud fra, at α og β ligge helt i det endelige, er det sikkert, at det endelige Liniestykke AB — vi ville kalde det $\overline{AB}$ med en Betegnelse, der fastholdes i det følgende — ligger indeni baade α og β, og tillige udenfor ω, thi ω ligger udenfor β, da α_1 gjør det.

Vi ville nu i Kurven β erstatte Buen β_2 med $\overline{AB}$, saa at dette Liniestykke i Forbindelse med β_1 danner en kontinuert, om end ikke fuldstændig kontinuert Linie β^* af anden Orden. Fra hvert Punkt M af λ udgaa to (egentlige eller uegentlige) Tangenter til β^*, da ω ligger udenfor denne Linie. Det almindeligvis fra M forskjellige Skæringspunkt mellem λ og en af disse kalde vi P, og betragte Forbindelsen mellem M og P. Til hvert Punkt M svarer to Punkter P: P_1 og P_2 — og omvendt. Punkterne M og P kunne aabenbart kun falde sammen derved, at de i Nærheden af Sammenfaldspunktet bevæge sig i modsatte Retninger.

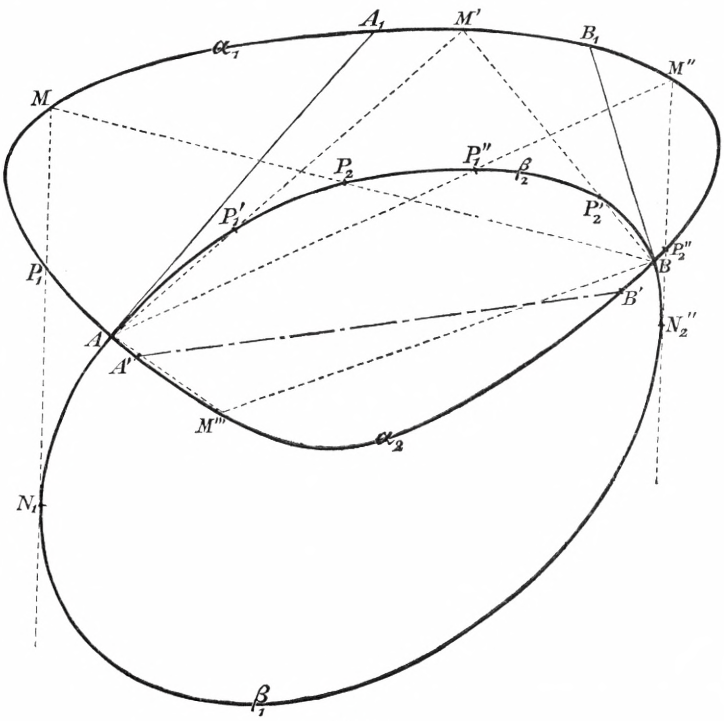

Fig. 1.

Lad nu Tangenterne i A og B skære α henholdsvis i A_1 og B_1, hvilke maa ligge paa Buen α_1. Vi ville antage, at Punkterne $A A_1 B_1 B$ paa α_1 følge paa hinanden i denne Orden, idet man ved Prøve let vil se, at der ingensomhelst væsentlig Forskjel kommer i Slutningsrækken, selv om de nævnte Punkter følge paa hinanden i Ordenen AB_1A_1B. Vi lade nu M gjennemløbe Buen AA_1 af α_1, ud fra A. Fra ethvert Punkt af denne Bue udgaa to Tangenter til β, og Røringspunktet N_1 for den ene t_1 af disse maa ligge paa β_1, medens Røringspunktet N_2 for den anden t_2 ligger paa β_2, thi de to Røringspunkter falde sammen i A, naar M falder i A, og naar M flytter sig, ville de derudfra bevæge sig i modsatte Retninger. Den fra t_1 forskjellige fra M udgaaende Tangent t_2 til β^* maa være Linien MB; denne Linie skærer nemlig baade α_1 og β_2 i hver et Punkt, saa at B maa være et Punkt, der skal regnes dobbelt som Skæringspunkt mellem Linien MB og Kurven λ af lige Orden. Linien MA er derimod ikke Tangent, da den udenfor M og A hverken skærer α_1 eller β_2, saa at A kun skal regnes som et enkelt Skæringspunkt. Lad t_1 skære α_1 i P_1, og t_2 skære β_2 i P_2. Begge Punkterne P bevæge sig i modsat Retning af M; M og P_1 bevæge sig nemlig i modsatte Retninger, fordi Røringspunktet N_1 ligger udenfor α, og M og P_2 i modsatte Retninger, fordi P_2 bevæger sig ud fra A ind paa β_2, medens M bevæger sig ud fra A ind paa α_1. Naar M nu ved Bevægelsen i samme Retning paa α overskrider A_1, vil N_2 vedblive at ligge paa β_2, men ogsaa N_1 vil nu rykke ind paa β_2, da Tangenten i A overskrides. Begge Tangenterne t_1 og t_2 udgaaende fra et Punkt af Buen A_1B_1 af α_1, ere altsaa uegentlige og falde henholdsvis i Linierne MA og MB. Punkterne P_1 og P_2 bevare imidlertid samme Bevægelsesretning som før. Dette er selvfølgelig for Punktet P_2's Vedkommende; hvad Punktet P_1 angaar, følger det deraf, at dette Punkt falder i A, naar M falder i A_1, og dernæst bevæger sig ind paa Buen β_2, thi Linien MA kan ikke yderligere skære α. Dette vedbliver nu til Punktet M naar B_1, hvorefter N_2 gaar over paa β_1, saa at t_2 bliver egentlig, t_1 vedblivende uegentlig Tangent; at P_1 og P_2 stadig bevæger sig i modsat Retning af M ses, som ovenfor ved M's Bevægelse paa Buen AA_1. Gaar endelig M over B_1 ind paa Buen β_2, blive begge de fra M udgaaende Tangenter til β^* uegentlige, og P_1 ligger fast i A, P_2 fast i B. Naar M altsaa gjennemløber λ i en bestemt Retning, ville Punkterne P gaa i modsat Retning, eller ligge stille — og omvendt paa Grund af Gjensidigheden i P's Bestemmelse ved M og M's ved P. Da tillige to sammenhørende Punkter P (eller M) ikke kunne falde sammen, er Brugen af Korrespondenssætningen sikkret, og i den 2—2 tydige Korrespondens mellem M og P maa der findes 4 Sammenfaldspunkter. Men to af disse falde i A og B, thi naar M langs α_1 konvergerer med A, vil Skæringspunktet mellem β_2 og Linien MB ligeledes konvergere mod A — og paa samme Maade for B's Vedkommende. Der findes derfor to og kun to Fællestangenter til Kurverne α og β, thi Røringspunkterne for saadanne kunne i hvert Fald ikke ligge paa α_2 eller β_2, saa at Udeladelsen af disse Buer, henholdsvis af α og β, ikke kan paavirke Resultatet.

Lad os nu gaa over til at antage, at de to Kurver α og β baade have fælles

Tangenter og fælles Punkter i vilkaarligt Antal. Man er da som før nævnt berettiget til — for Korthedens Skyld — at gaa ud fra, at begge Kurverne ligge helt i det endelige. Er dette opnaaet, vide vi, at ethvert endeligt Liniestykke, som forbinder to Punkter, der ligge indeni en af Kurverne ikke yderligere kan have noget Punkt fælles med denne Kurve, og at den endelige Forbindelseslinie mellem de to Skæringspunkter ligger indeni begge Kurver. Lad nu A og B være to Skæringspunkter, der følge paa hinanden paa α. En Bue α' af α, der forbinder dem (og ikke indeholder andre Skæringspunkter) maa da ligge helt udenfor eller helt indeni β. I det sidste Tilfælde lade vi et Punkt, der gaar langs α' fra A til B, overskride B og bevæge sig langs en Bue α_1 af α til det næste Skæringspunkt C; denne Bue $\alpha_1 = BC$ maa da nødvendigvis ligge udenfor β. Da nu α og β ligge helt i det endelige, maa Skæringspunkternes Antal være lige; vi se altsaa, at Benævnelsen $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \ldots$ af Skæringspunkterne kan vælges saaledes, at Buerne $A_1 A_2 = \alpha_1$, $B_1 B_2 = \beta_1$, $C_1 C_2 = \gamma_1$, ... af α alle ligge udenfor β.

Ved en Bue begrænset af to Punkter skal stadig forstaas den, der ikke indeholder andre Skæringspunkter. Lad nu et ved A_1 eller A_2 nærliggende Punkt af α, der ikke ligger paa α_1, være henholdsvis A' eller B' (se Fig. 1). Disse ligge indenfor β og forbindes med et endeligt Liniestykke $\overline{A'B'}$, der ikke har noget Punkt fælles med β. Buen α_1, i Forbindelse med $\overline{A'B'}$ danner en kontinuert Linie α^* af anden Orden; en vilkaarlig ret Linie skærer nemlig α_1 i højst to Punkter, og en ret Linie, der skærer $\overline{A'B'}$ i ét Punkt, S, vil desuden skære α_1 i ét Punkt, thi da S ligger indeni α, vil Linien skære α i to Punkter, der ere skilte ved A' og B', saa at et og kun ét af Skæringspunkterne vil ligge paa α_1.

De to Kurver β og α^* have nu to og kun to Punkter fælles, og man kan anvende det nysfundne Resultat. At α^* ikke er fuldstændig kontinuert spiller nemlig ingen Rolle, thi man udelader dog den Bue af α^*, der ligger inden i β. Der findes altsaa to og kun to Røringspunkter for fælles Tangenter til α og β paa Buen α_1. Det samme gælder for de andre Buer β_1, γ_1, ... Hermed har man faaet alle fælles Tangenter til α og β, thi intet Røringspunkt kan ligge paa de Buer af α, der ligge indeni β. Man har altsaa følgende Sætning:

Naar to Kurver af anden Orden ingen fælles Punkter have, ville de have 0 eller 4 fælles Tangenter. Have de ingen fælles Tangenter, ville de have 0 eller 4 fælles Punkter. I alle andre Tilfælde ville de to Antal være lige store — men hver for sig kan det være et vilkaarligt nok saa stort lige Tal. (4)

En sammenhængende af to Endepunkter begrænset Del af en kontinuert Kurve af anden Orden ville vi kalde en elementær Bue, der dog ikke behøver at være fuldstændig kontinuert. Den ved Dualitetsprincipet tilsvarende Bue har den samme Karakter. I Virkeligheden vil dette ikke sige andet end, at vi ved en elementær Bue vil forstaa en vilkaarlig Del af en (projektivt opfattet) konveks Polygon.

Vi have i det foregaaende nævnt, at enhver af os betragtet Kurve skal være sammensat af et vist Antal Buer; vi ville nu præcisere dette derhen, at *enhver af disse sammensættende Buer skal være en elementær Bue.*

Naar man nu sammensætter to fuldstændig kontinuerte elementære Buer AB og BC til et nyt fuldstændig kontinuert Buestykke, maa Tangenterne i B til AB og BC falde sammen i én Linie b. Der bliver da kun 4 Muligheder, der med sædvanlige Navne give Anledning til 1) et sædvanligt Kurvepunkt, 2) et Infleksionspunkt (med Vendetangent), 3) en Spids af 1ste Art, 4) en Spids af anden Art (ligeledes med Vendetangent). Se Formerne i Fig. 1. Naar nemlig de ved B tilstrækkelig nærliggende Dele af AB og BC falde paa modsatte Sider af en gjennem B dragen fra b forskjellig Linie b', haves 1) eller 2), eftersom Buernes positive Sider enten støde op til hinanden eller skilles ved Buen. Paa tilsvarende Maade skjelnes 3) og 4) fra hinanden, naar de nævnte Dele ligge paa samme Side af b'.

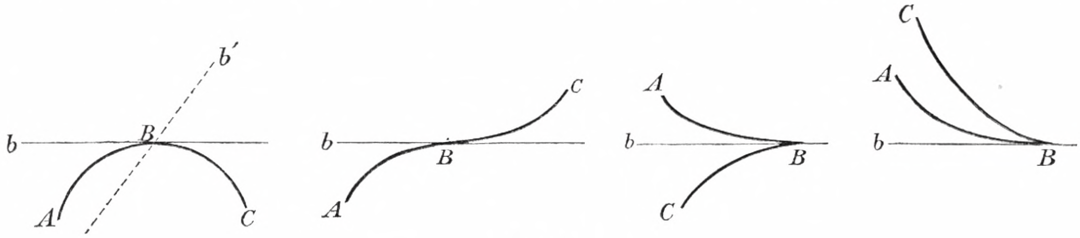

Fig. 2.

Af den elementære Bues Egenskaber faas da de følgende *Sætninger* (der altsaa ikke have aksiomatisk Karakter). Hermed forudsættes det bevægelige Punkt P stadig at ligge saa nær ved Tangenten b, at et saadant Røringspunkt for en fra P udgaaende Tangent til AC, der oprindelig ligger i B, ikke ved P's kontinuerlige Bevægelse falder udenfor nogen af Buerne AB eller BC — og vi betragte udelukkende disse Tangenter. Naar P overskrider b uden at gaa gjennem B, vil der hverken vindes eller tabes nogen Tangent fra P til AC i Tilfældene 1) og 3), men derimod vil der i Tilfældene 2) og 4) vindes eller tabes to Tangenter. Overskrider P Punktet B, men ikke i Tangenten b's Retning, vil der i Tilfældene 2) og 3) hverken vindes eller tabes nogen Tangent, men derimod vindes eller tabes to i de andre Tilfælde. Overskrider endelig P Punktet B i b's Retning, vindes eller tabes ingen Tangent i Tilfældene 1) eller 2), medens der ellers vindes eller tabes to. Efter vore Forudsætninger er det tilmed sikkert, at man ikke paa andre end paa de her angivne Maader kan vinde eller tabe Tangenter udgaaende fra et Punkt.

Naar P gjennemløber Buen AC og i B overskrider et Vendepunkt eller en Spids af første Art, vil Røringspunktet M for den fra P udgaaende Tangent, der ved P's kontinuerlige Bevægelse falder i b, naar P falder i B, i Nærheden af B bevæge sig i modsat Retning af P. Det samme gjælder, naar P bevæger sig paa en bestemt af de to Buer, der støde sammen i en Spids af anden Art. P og M kunne endvidere kun falde sammen i et af de her nævnte Punkter.

Paa alle disse Sætninger kan man anvende Dualitetsprincipet. Anvendes dette, bevare Punkterne 1) og 4) deres Karakter, medens 2) og 3) ombyttes.

Ruller en Tangent m paa en Kurve, idet Røringspunktet M bevæger sig i samme Retning, vil et af Skæringspunkterne P med en anden Kurve — eventuelt selve Kurven — stadig kunne holdes adskilt fra de andre Skæringspunkter, indtil m gaar gjennem en Spids, eller indtil m bliver en fælles Tangent — eventuelt en Dobbelttangent — i hvilket Tilfælde to sammenhørende Punkter P rykke sammen i modsatte Retninger og derefter forsvinde. Saalænge man kan fastholde et enkelt Punkt P, bevarer dette sin Omløbsretning uforandret, indtil M overskrider et Infleksionspunkt eller et Skæringspunkt med den anden Kurve — eventuelt et Dobbeltpunkt paa selve M's Kurve; kun paa denne Maade kan P's Bevægelsesretning skifte, medens M's Retning bevares.

I denne Afhandling betragtes næsten udelukkende kun Afhængigheder mellem et Kurvepunkt M og dettes Tangentialpunkter $P_1 P_2 \ldots$ Her gjælder det som en Hovedregel, at et Punkt M og et tilsvarende Punkt P udelukkende kun da kunne falde sammen, naar disse kort inden Sammenfaldet bevæge sig i modsatte Retninger paa Kurven. Det samme gjælder om to Tangentialpunkter svarende til samme Røringspunkt.

Endelig følger det af ovenstaaende, at et Punkt, der løber ikke i, men langs med en lukket fuldstændig kontinuert Kurve og stadig nær ved denne, men uden at skære den, ved Røringspunktet for en Vendetangent 1) og 4), og kun der, vil gaa over fra en Bues positive til dens negative Side.

Til en Kurves Singulariteter henregne vi foruden Vendetangenter og Spidser tillige de Punkter, hvorigjennem Kurven gaar flere end én Gang (Dobbeltpunkter), og de Tangenter, der berøre flere end én Gang (Dobbelttangenter). En Bue uden Singulariteter kan dog godt gaa én Gang gjennem et Dobbeltpunkt og gjennem det ene Røringspunkt af en Dobbelttangent til den Kurve, hvoraf Buen er en Del.

Enhver Kurve, vi betragte, er sammensat af elementære Buer, og vi ville nu først fremsætte nogle Sætninger om saadanne.

En kontinuert Bue uden Singulariteter, der ikke af nogen ret Linie skæres i flere end to Punkter, maa være en elementær Bue. (5)

Forbindes nemlig et fast Punkt P af Buen med et bevægeligt M, der løber i en bestemt Retning fra Buens ene Endepunkt A til det andet B, vil Linien PM paa Grund af den gjensidige entydigede Afhængighed mellem Punkt M og Straale PM stadig dreje sig i samme Retning. Af de to Stykker, hvori den rette Linie AB deles af A og B, vil altsaa det ene $(AB)_1$ skæres af Linien PM, medens det andet $(AB)_0$ slet ikke skæres af disse. Da en Linie MP ligesaavel kan tænkes udgaaende fra M som fra P, vil den forskjellige Betydning, som $(AB)_1$ og $(AB)_0$ have for Buen, være uafhængig af Valget af P. Heraf følger, at den givne Bue sammen med $(AB)_0$ danner en lukket kontinuert Linie, der er af anden Orden.

I Fald den givne Bue er fuldstændig kontinuert, kan man give Liniestykket $(AB)_0$ en saadan Krumning og knytte det saaledes i A og B til den givne Bue, at ogsaa den hele Gren af anden Orden bliver fuldstændig kontinuert; gjennem A og B gaa nemlig ingen Tangenter til den givne Bue.

Fra et vilkaarligt Punkt i Planen udgaa højst 2 Tangenter til Buen. Disse tabes begge, naar Punktet overskrider Buen fra dennes positive til dens negative Side. Der tabes eller vindes derimod én Tangent, naar Punktet overskrider en Tangent til Buen AB i et af dennes Endepunkter.

Man har endvidere:

(6) En fuldstændig kontinuert Bue uden Singulariteter, der ikke skæres af Tangenterne i dens Endepunkter, maa være en elementær Bue.

Det kommer væsentligt an paa at vise, at ingen Tangent atter kan skære Buen. Lad os da antage, at en Tangent m i M yderligere skærer i P. Dette Punkt maa enten falde paa Buestykket AM eller paa MB; lader os antage, at det falder paa AM, hvilket ene Tilfælde det er tilstrækkeligt at betragte. Man kan da forskyde M langs Buen og lade m og P følge med. P maa derved stadig bevæge sig i samme Retning, saafremt M gjør det, og de to Punkters Bevægelsesretninger maa enten være den samme eller være modsatte. I det første af disse Tilfælde forskyde vi M, til det falder i B; P kan derved efter det tidligere nævnte ikke have overskredet M og maa altsaa endnu befinde sig paa Buen AM, hvilket er mod Forudsætningen. M og P kunne heller ikke begge samtidig konvergere med B, da dette er et sædvanligt Kurvepunkt. Bevæge M og P sig derimod i modsatte Retninger, forskyde vi M, til det falder i A; herved maatte M og P have truffet hinanden paa Buen, hvilket vilde give en Singularitet.

Lad nu Q være et vilkaarlig fast Punkt af Buen, paa hvilken det bevægelige Punkt M bevæger sig fra Q's Nabopunkt Q_1 til et af Buens Endepunkter f. Ex. B. Linien QQ_1 vil kun skære Buen i disse to Punkter, og der kan ikke ske nogen Forandring i Antallet af Skæringspunkter mellem Buen og den bevægelige Linie QM, uden derved at Linien QM gaar gjennem B eller gjennem A, inden M endnu har naaet B. Men rykker et nyt Skæringspunkt ind over B, maatte dette gaa i modsat Retning af M og vilde kræve en gjennem Q gaaende Tangent, hvilket er umuligt efter det foregaaende. Skulde endvidere et nyt Skæringspunkt N rykke ind over A, maatte det endnu befinde sig paa Buen, naar M er falden i A, thi N kan ikke overskride Q, uden at der gik en Tangent gjennem et Punkt M. En Linie p gjennem B skar da i to Punkter Q og N. Dette er umuligt, thi hvis disse, naar p drejer sig om B, bevæge sig i modsatte Retninger, vilde der kræves en Tangent gjennem B, og hvis de gik samme Vej (altsaa begge i Retningen fra A til B), vilde Tangenten i B skære Kurven paany. Efter den foregaaende Sætning er altsaa Buen elementær.

Dualitetsprincipet giver, at en Bue uden Singulariteter, til hvilken der ikke gaar nogen Tangent fra Buens Endepunkter, maa være elementær. (7)

Men man kan for at afgjøre, om en Bue uden Singulariteter er elementær, ogsaa nøjes med alene at betragte Forholdene ved Buens ene Endepunkt, idet man har Sætningen:

En fuldstændig kontinuert Bue AB uden Singulariteter, der ikke skæres af Tangenten i A, og til hvilken der ikke gaar nogen Tangent ud fra A, maa være elementær. (8)

Det kommer kun an paa at bevise, at Tangenten i B heller ikke skærer Buen. Antager man nemlig, at der findes et eller flere saadanne Skæringspunkter, og lader man et Punkt M gjennemløbe Buen ud fra B, vil Tangenten m i M skære Kurven i hvert Fald i ét Punkt P, der eksisterer, naar M ligger nær ved B. Under M's Bevægelse kan det betragtede Punkt P ikke forsvinde uden ved at gaa gjennem A eller B, og saalænge det forefindes, kan dets Bevægelsesretning ikke skifte, naar M's Retning bevares. Punktet P kan nu ikke bevæge sig i modsat Retning af M, thi P kan her kun forsvinde ved at overskride B, og det kan ikke naa B uden at overskride M, men M kan det ikke overskride uden at give Buen en Singularitet. Bevæger P sig derimod i samme Retning som M, kan det ikke forsvinde inden det naar A, og M, der ikke kan have overskredet P, vil, naar P falder i A, være Røringspunktet for en fra A udgaaende Tangent, hvilket er mod Forudsætningen. Buen er altsaa efter det foregaaende en elementær Bue.

Vi kunne nu besvare et Spørgsmaal, som i det her benyttede System er væsentligt. Efter vore Forudsætninger skal jo enhver Kurve sammensættes af elementære Buer. Lad nu A være et vilkaarligt Punkt paa Kurven, og lad der være valgt en bestemt Omløbsretning paa denne; man kan da spørge om, hvor langt en fra A i den valgte Retning udgaaende Bue kan forlænges uden at ophøre med at være elementær. En Bue AM kan i hvert Fald ikke være elementær, naar Tangenten a i A skærer den, og lige saa lidt, naar der gaar en Tangent til den ud fra A. Men naar et Punkt M ud fra A gjennemløber Buen og ikke overskrider nogen Spids eller noget Infleksionspunkt og ligesaa lidt noget Dobbeltpunkt to Gange, eller begge Røringspunkterne for en Dobbelttangent, og Linien AM den første Gang, den er bleven Tangent i M, endnu ikke har overskredet a vil denne Bue AM være elementær efter det foregaaende og tillige saa udvidet som muligt. Det samme gjælder om Buen AM, naar Linien AM første Gang har naaet Stillingen a uden under Vejs at have været Tangent til den gjennemløbne Bue. I Fald der paa den herved bestemte Bue findes Spidser og Infleksionspunkter, ender den største fra A udgaaende Bue i det første saadanne Punkt, der naas i den valgte Retning.

§ 3.

Nogle almindelige Sætninger om grafiske Kurver.

Vi kunne nu bevise et Par Sætninger af almindeligere Beskaffenhed og tage først:

(1) *En lukket fuldstændig kontinuert Kurve uden Vendetangenter eller Spidser og uden Dobbelttangenter eller Dobbeltpunkter maa være af anden Orden*[1].

Paastanden er selvfølgelig, naar den fra et Kurvepunkt i en bestemt Retning udgaaende største elementære Bue atter ender i A — eller rettere i et Nabopunkt til A.

I modsat Fald vil Maksimumsbuen gaa fra et Punkt A til et fra A forskjelligt Kurvepunkt B, og Tangenten i det ene Endepunkt vil her, hvor der ingen singulære Punkter findes, gaa gjennem det andet Endepunkt — lad os antage, at Tangenten b i B gaar gjennem A. Denne Bue AB vil da i Forbindelse med et bestemt Liniestykke $(AB)_0$ danne en kontinuert (men almindeligvis ikke fuldstændig kontinuert) Kurve Γ af anden Orden (se Fig. 3). En saadan deler Planen i to fuldstændig adskilte Omraader; vi ville vise, at Fortsættelsen af Buen AB dels udover A og dels udover B nødvendigvis maa føre ind i forskjellige Omraader. Betragtes nemlig et nær ved B liggende Punkt M af Buen AB, vil Tangenten m i M skære Kurven (foruden muligvis andre Steder) i hvert Fald i et Punkt N_1, der ligger nær ved A. Men N_1 kan ikke ligge paa den nævnte elementære Bue; derfor vil N_1 og Fortsættelsen $AN_1 \ldots$ af denne Bue udover A ligge udenfor Γ (se Definitionen Side 15). Endvidere vil m_1 ikke skære Stykket $(AB)_0$ men $(AB)_1$ ifølge dette Stykkes Definition; naar altsaa et Punkt M bevæger sig paa Kurven udover den elementære Bue ved at passere B, vil Skæringspunktet S mellem Tangenten m i M og Linien AB, hvis Bevægelsesretning ikke skifter

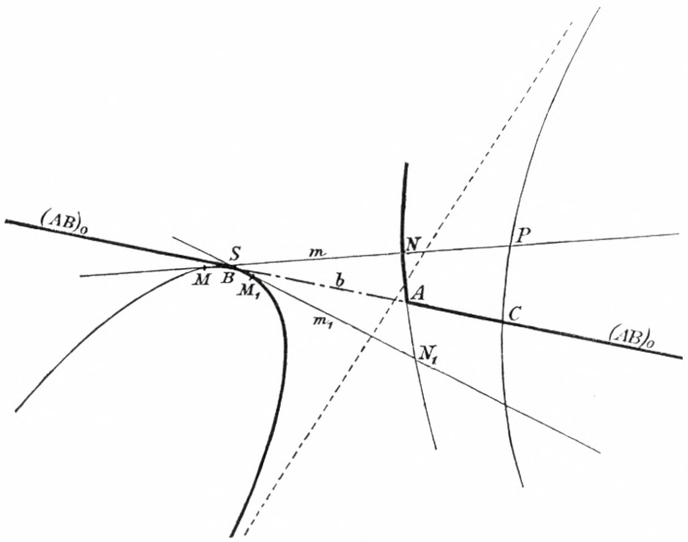

Fig. 3.

[1]) Denne Sætning kan ikke betragtes som saa selvfølgelig, som man maaske ved første Øjekast vilde tro. Paa Grund af den store Mængde Muligheder, hvorefter Kurven kan indeholde spiralformede Buer, kan et Bevis paa ingen Maade anses som en blot systematisk Pynt.

derved, at Punktet M passerer B, nu befinde sig paa Stykket $(AB)_0$. Vælges M tilstrækkelig nær ved B, ville M og S ligge saa nær ved hinanden, at der heller ikke fra M kan udgaa nogen Tangent, der berører i endelig Afstand fra B, og ingen Tangent, der udgaar fra M, kan berøre i et Nabopunkt til B, da B er et sædvanligt Kurvepunkt. Men endvidere kan MA ikke være uegentlig Tangent til Γ i A, thi da en saadan Linie foruden i M endnu maatte skære Kurven i et andet ved B nærliggende Punkt M_1, vilde ogsaa M_1B være en uegentlig Tangent i B, hvilket er umuligt, da M_1 ligger paa selve Linien Γ. MB kan ikke være uegentlig Tangent i B, da der fra M maa udgaa 0 eller 2 (egentlige og uegentlige) Tangenter til Γ. Men af dette følger, at M ligger indeni Γ. Da nu Kurven skal være lukket og uden Dobbeltpunkter, maa den nødvendigvis have mindst et Punkt C fælles med $(AB)_0$, fordi den skal gaa fra M indeni Γ til N_1 udenfor samme.

Bevæger nu et Punkt M sig paa Kurven, men ikke ad den elementære Bue, fra B til C, vil Tangenten m i M, saalænge M er i Nærheden af B, nødvendigvis skære den Del af Kurven, der er nær ved C, i et Punkt P, om hvilket man kan bevise, at det ligger indeni Γ. Man skal altsaa vise, at der fra P ikke udgaar nogen Tangent — egentlig eller uegentlig — til Γ. Fra P kan der nu for det første ikke udgaa nogen egentlig Tangent til den elementære Bue AB, der berører i en endelig Afstand fra A eller B, thi i saa Fald vilde der ogsaa fra C udgaa en saadan Tangent, medens dog C er et Punkt af Γ. Et ved B nærliggende Røringspunkt mellem Γ og en Tangent fra P kan ikke eksistere, da den Tangent, der berører Kurven nær ved B, har et Røringspunkt M, der ikke ligger paa Γ, og ligesaa lidt kan der findes et ved A nærliggende Røringspunkt, da Tangenten i A danner en endelig Vinkel med Linien AC og AP. Endvidere er PB ingen uegentlig Tangent, thi dennes Nabolinie PM skærer Γ i Nærheden af B i ét og kun ét Punkt S. Linien PA kan endelig ikke være uegentlig Tangent, da man ved at overskride Γ i C nødvendigvis maa have tabt to eller vundet to Tangenter.

Til at begynde med løbe altsaa M og P i modsatte Retninger paa den Bue BC, der ikke indeholder nogen Del af Γ. Men da Kurven ikke har Singulariteter, kan Punktet P ikke forsvinde, idet M bevæger sig, og ligesaa lidt kan P's Bevægelsesretning skifte, medens M's Retning bevares. Derfor maa M og P nødvendigvis en Gang støde sammen, hvilket strider imod, at Kurven hverken har Vendetangenter eller Spidser.

Der findes ingen lukket fuldstændig kontinuert Kurve, der af Singulariteter alene har en enkelt Vendetangent eller en enkelt Spids, eller en enkelt Dobbelttangent eller et enkelt Dobbeltpunkt. (2)

Vi nøjes med at bevise Sætningens første Del, idet de øvrige Dele kunne bevises paa aldeles lignende Maade. Lad Vendetangenten være a med Røringspunktet A. Tangenten m i Punktet M, der ligger nær ved A, skærer Kurven i et ved A nærliggende Punkt P, der vil bevæge sig i modsat Retning af M. Desuden kan m skære i flere

Punkter, der kunne bevæge sig i samme eller i modsat Retning af M. Naar nu M gjennemløber hele Kurven ud fra A og tilbage til A, vil P stadig kunne fastholdes som forskjellig fra de andre Skæringspunkter mellem m og Kurven, og endvidere vil P under den givne Forudsætning stadig bevare sin Retning, naar M gjør det. Men i saa Fald maa M og P nødvendigvis en Gang være falden sammen, inden M er vendt tilbage til A, d. v. s. Kurven maa have flere Singulariteter end én Vendetangent.

Vi have i det foregaaende vist, at der ikke eksisterer Kurver med kun en enkelt af de betragtede Singulariteter (og ingen andre). Man ser paa samme Maade som i det sidste Bevis, at det samme ogsaa er Tilfældet, naar det ene singulære Punkt er en Spids af anden Art.

Vi ville ved en lukket kontinuert Kurves Orden n forstaa det højeste Antal af Skæringspunkter, den kan have med en vilkaarlig ret Linie. Kurvens Klasse n' defineres paa lignende Maade. Antallet af Vendetangenter (heri medregnet Tangenterne i eventuelle Spidser af anden Art) benævnes e', og Antallet af Spidser (eventuelt af begge Arter) med e.

Da efter Bemærkningerne Side 20 Skæringspunkter mellem en af vore Kurver og en
(3) bevægelig ret Linie tabes eller vindes parvis, ser man for det første, at enhver ret Linie maa skære en given Kurve enten stadig i et lige eller stadig i et ulige Antal Punkter.

Det tilsvarende gjælder om Tangenter udgaaende fra et Punkt.

Nyttig særlig for Øjet til hurtig Afgjørelse af en i Tegning forelagt Kurves Orden er følgende Hjælpesætning:

(4) Naar ingen Tangent til en lukket kontinuert Kurve skærer denne i flere end n Punkter udenfor Røringspunktet, vil ingen ret Linie kunne skære i flere end $n+2$ Punkter.

Naar nemlig en ret Linie l skærer Kurven, maa man sikkert paa l kunne finde et Punkt Q, hvorfra der udgaar Tangenter til Kurven; lad disse være t_1, t_2 ... med Røringspunkter i T_1, T_2 ... Linien t_1 skærer foruden i T_1 højst i n Punkter. Drejer man Linien t_1 om Q i en bestemt Retning, kan der optræde to nye Skæringspunkter, der oprindelig vare forenede i T_1, og Linien skærer da i $n+2$ Punkter. Den næste Ændring i Skæringspunkternes Antal kan først ske derved, at den bevægelige Linie næste Gang bliver Tangent ved f. Ex. at falde i t_2. Men ved Fortsættelse af Drejningen i samme Retning kan der ikke herved paany vindes to Skæringspunkter, thi da ingen af de Skæringspunkter, der ikke ligge uendelig nær ved T_2, herved kunne tabes, vilde t_2 i saa Fald foruden i T_2 skære i $n+2$ Punkter.

Herved er der ikke taget Hensyn til, at Kurven kunde have Spidser. For at Sætningen skal være almengyldig, maa man paa dette Sted opfatte enhver gjennem en Spids gaaende ret Linie som en Tangent, hvorefter Beviset er gyldigt. Det gjælder ogsaa, selv om Kurven ikke er fuldstændig kontinuert, saafremt uegentlige Tangenter medregnes.

Lad nu et Punkt P gjennemløbe en ret Linie, der skærer Kurven i n_1 Punkter. Antallet af Tangenter udgaaende fra P vil forøges eller formindskes med to, ved at P overskrider enten Kurven eller en af dennes Vendetangenter — og vil kun forandres ved en af disse Overgange.

Lad os antage, at der vindes Tangenter ved ν af den første Slags og ε' af den sidste Slags Skæringspunkter, idet Linien gjennemløbes i en bestemt Retning. Da man, naar man har gjennemløbet hele Linien, nu skal have samme Antal af Tangenter som før, maa man altsaa have:

$$2\nu + 2\varepsilon' - 2(n_1 - \nu) - 2(e' - \varepsilon') = 0,$$

eller

$$n_1 + e' = 2\nu + 2\varepsilon'$$

ɔ: En fuldstændig kontinuert Kurves Orden og Antallet af dens Vendetangenter ere enten begge lige eller begge ulige Tal. (5)

Heraf følger, at ogsaa Kurvens Klasse og Antallet af dens Spidser ere begge lige eller begge ulige.

Vi ville nu erstatte P's retlinede Bane med en anden og lade P gjennemløbe en lukket kontinuert Kurve G_1 i en bestemt Retning fra P_0 tilbage til P_0. G_1 behøver ikke at være fuldstændig kontinuert, dog maa intet fremspringende Punkt af G_1 ligge paa G — i hvilket Tilfælde særlige Vedtægter maa træffes. Lad os antage, at der tabes 2 Tangenter udgaaende fra P ved at P overskrider ε_1 af Kurvens Vendetangenter, medens der vindes 2 ved at overskride ε_2 af dem. Lad der endvidere ved de s Skæringspunkter mellem G_1 og den givne Kurve G tabes Tangenter ε_1' Gange og vindes Tangenter ε_2' Gange. Man faar da som før:

$$2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1' - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2' = 0,$$

hvoraf

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + s = 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2'.$$

Naar nu begge Kurverne G_1 og G ere af ulige Orden, vil det samlede Antal af Skæringspunkter $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ mellem den ene Kurve G_1 og den andens Vendetangenter være ulige; i alle andre Tilfælde er $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ lige. Man har altsaa:

To lukkede kontinuerte Kurver skære hinanden i et ulige Antal Punkter, naar begges Orden er ulige — ellers er Skæringspunkternes Antal lige. (6)

Ogsaa paa denne Sætning kan Dualitetsprincipet anvendes.

Man kan finde en i visse Tilfælde anvendelig almindelig Sætning om Antallet af fælles Tangenter til to Kurver C og Γ. Man har nemlig:

(7) Naar en Kurve C hverken skærer Γ eller nogen af dennes Vendetangenter eller Dobbelttangenter og yderligere ingen fælles Tangent til Γ og C skærer C udenfor Røringspunktet, vil Antallet af fælles Tangenter være 0 eller $2(m-1)n$, hvor n betyder Antallet af Tangenter til Γ udgaaende fra et vilkaarligt Punkt af C, og m Antallet af Skæringspunkter mellem C og en saadan vilkaarlig Tangent til Γ, der overhovedet skærer C.

Herved maa det bemærkes, at en Tangent til Γ, der udgaar fra en Spids af C, medregnes mellem de fælles Tangenter, og at i Overensstemmelse dermed heller ingen saadan Tangent maa skære C udenfor selve Spidsen; hvorledes Γ ligger i Forhold til C's singulære Tangenter er ligegyldigt.

Nu vil der fra hvert Punkt M af C udgaa det samme Antal af n Tangenter til Γ, da C hverken skærer Γ eller nogen af dennes Vendetangenter (eller Dobbelttangenter), og hver saadan Tangent vil foruden i M endnu skære C i $m-1$ Punkter P, da ingen eventuel fælles Tangent yderligere skærer C. Til hvert Punkt M svarer altsaa $(m-1)n$ Punkter P og omvendt. Endvidere vil intet Punkt P kunne skifte Retning paa C, naar M bevarer sin Retning, og to sammenhørende Punkter P kunne ikke falde sammen, hvoraf følger, at alle de sidstnævnte Punkter indbyrdes maa gaa i samme Retning; men naar der overhovedet findes en fælles Tangent, saa maa i Nærheden af dennes Røringspunkt med C tilsvarende Punkter M og P bevæge sig i modsatte Retninger.

Sætningen følger derefter umiddelbart af Korrespondancesætningen; den er mest brugbar, naar $m = 2$.

Den dualistisk tilsvarende Sætning kan ogsaa opstilles.

En lukket Kurve, der deler Planen i to adskilte Dele, maa være af lige Orden, thi gaar man langs en ret Linie fra et Punkt P, der ikke ligger i Kurven G, tilbage til P, maa man derved have traadt lige mange Gange ind i og ud af det Rum, hvori P ikke ligger. Omvendt har man ogsaa:

(8) Enhver lukket kontinuert Kurve af lige Orden uden Dobbeltpunkter deler Planen i to adskilte Dele.

Lad P og Q være to Punkter i Planen; vi paastaa da, at P og Q ikke høre til samme (plane) Rum, naar et Liniestykke PQ skærer Kurven G i et ulige Antal Punkter, medens det hører til samme Rum, naar der paa Stykket PQ findes et lige Antal Skæringspunkter. Da hele Linien skærer G i et lige Antal Punkter, er det ligegyldigt, hvilket af de to Liniestykker PQ vi vælge, f. Ex. det endelige.

For at godtgjøre Berettigelsen til denne Paastand, maa det eftervises, a) at man i det førstnævnte Tilfælde ikke ad nogen anden kontinuert Vej kan komme fra P til Q uden at skære G, b) at man i det sidstnævnte Tilfælde virkelig kan finde en Vej fra P til Q, der ikke skærer G.

a) Betragtes en vilkaarlig kontinuert Vej μ, der fører fra P til Q, vil denne i Forbindelse med Liniestykket PQ danne en lukket Linie, der altsaa skærer G i et lige Antal Punkter; da imidlertid et ulige Antal af disse ligge paa Liniestykket, maa der ligge mindst ét paa μ. Man kunde naturligvis ogsaa have begyndt med at antage, at μ skærer i et ulige Antal Punkter, hvorefter ogsaa PQ maatte gjøre det.

b) Lad Linien PQ's Skæringspunkter med G være A, B . . . K . ., hvor Betegnelserne ere valgte saaledes, at man langs Linien og uden at skære Kurven kan komme fra A til P og fra K til Q; Stykket KQ antages tillige endelig, hvilket altid kan opnaas. Vi kunne da lade et Punkt M bevæge sig langs den rette Linie, og uden at skære Kurven fra P til et Punkt A_1, der ligger nær ved A; og derfra langs Kurven (i en selvvalgt Retning) uden at skære denne, men stadig meget nær ved den, til et Punkt K_1 af Linien PQ i Nærheden af K. Hvis nu K_1 og Q ikke paa det endelige Liniestykke K_1Q ere skilte ved K, have vi konstrueret en Vej μ: $PA_1 \ldots K_1Q$, der uden Skæring med Kurven føres fra P til Q, og dette maa altid være Tilfældet. Hvis nemlig K_1 og Q vare skilte paa det retliniede endelige Stykke ved K, vilde man ad samme Vej være kommen fra P til Q saaledes at Kurven kun var overskredet 1 Gang, og dette er umuligt ifølge a).

Om lukkede Kurver af ulige Orden har man:

E n l u k k e t K u r v e a f u l i g e O r d e n u d e n D o b b e l t p u n k t e r b e g r æ n s e r i k k e n o g e n D e l a f P l a n e n. (9)

Vi skulle altsaa bevise, at man altid ad en kontinuert Vej kan komme fra et Punkt P til et vilkaarligt andet Punkt Q uden at overskride Kurven. Lad Linien PQ skære i A, B . . . K . . ., hvor Betegnelserne ere valgte som ovenfor. Lad os endvidere danne samme Vej μ: $PA_1 \ldots K_1Q$ som før. Paastanden er da godtgjort, saafremt K_1 ligger paa det endelige Liniestykke KQ. Hvis dette ikke er Tilfældet, vil det blive det derved, at vi lade M løbe langs Kurven i modsat Retning af før; thi det Punkt K_2, vi derved faar i Stedet for K_1, vil ligge paa den anden Side af den gjennem K gaaende Bue end K_1. Kurven har nemlig et ulige Antal Vendepunkter og ved at løbe forbi et saadant gaar M over fra en Bues positive til dens negative Side (eller omvendt). Naar nu det ene Kurvestykke AK indeholder et lige Antal Vendepunkter, vil det andet indeholde et ulige Antal, og herved er Sætningen aabenbart bevist.

§ 4.

Kurven af tredie Orden.

Vi ville nu gaa over til Kurven af tredie Orden uden Dobbeltpunkter eller Spidser; en saadan maa have mindst en Vendetangent. Ingen Vendetangent kan yderligere skære Kurven, thi drejede man Vendetangenten en lille Vinkel, fik man i saa Fald en Linie, der skar i 4 Punkter. Fra ethvert af Kurvens Punkter udgaar det samme Antal af Tangenter, saafremt Kurven ikke har Dobbeltpunkter, thi ved at lade et Punkt M gjennemløbe Kurven, ville vi i saa Fald hverken overskride Kurven eller nogen Vendetangent udenfor dennes Røringspunkt. For at bestemme Antallet af de gjennem et Kurvepunkt P gaaende («udgaaende») Kurvetangenter, der berøre udenfor P, kunne vi derfor vælge P i Nærheden af et af de altid eksisterende Infleksionspunkter. Fra P udgaar der da sikkert én Tangent, hvis Røringspunkt R ogsaa falder i Nærheden af Infleksionspunktet. Forbindelseslinien mellem P og et bevægeligt Punkt X af Kurven skærer i endnu ét Punkt Y, og naar X vedbliver at løbe i en bestemt Retning, maa Y ogsaa gjøre det, da ingen gjennem P gaaende Tangent yderligere kan skære Kurven. Men i Nærheden af R løbe X og Y i modsat Retning. Man har altsaa:

(1) Gjennem hvert Punkt af en Kurve af tredie Orden uden Dobbeltpunkter og Spidser udgaa to Tangenter til Kurven.

Vi ville nu bestemme Antallet af Vendetangenter og drage i et vilkaarligt Punkt X af Kurven en Tangent, der endnu skærer i et Punkt Y. Til hvert Punkt Y svarer omvendt to Punkter X, hvilke aldrig kunne falde sammen; de to Punkter X maa derfor bevæge sig i samme Retning paa Kurven derved, at Y flytter sig i en bestemt Retning. Men de to Retninger maa være modsatte, hvilket ses ved at lade X overskride et Infleksionspunkt (af hvilke altid mindst 1 eksisterer). Korrespondancesætningen giver da:

(2) Enhver Kurve af tredie Orden uden Dobbeltpunkter og Spidser har tre Vendetangenter.

Af en foregaaende Sætning følger derefter endvidere, at enhver saadan Kurve er sammensat af tre elementære Buer. Lad disse Buer være AB, BC og CA, hvor A, B og C ere Infleksionspunkterne. Af Røringspunkterne for de to Tangenter, der udgaa fra et Punkt P paa en af disse Buer, maa der ligge ét paa hver af de andre Buer. Vælges nemlig et Punkt M af Buen AB nær ved A, findes der sikkert én Tangent, der berører Buen AC, og vælges M nær ved B, sikkert én Tangent, der berører BC. Disse Forhold kunne dernæst ikke forandres ved, at M flytter sig paa Buen AB, thi derved overskrides hverken nogen af de andre Buer og ligesaa lidt nogen Endetangent til dem. Ogsaa fra et Punkt, der kan naas fra AB uden at overskride nogen Vendetangent eller Kurven, maa der altsaa gaa én Tangent til hver af Buerne AC og BC.

Man kan give Carnots Sætning en speciel Form, i hvilken den ogsaa gjælder om en vilkaarlig lukket grafisk Kurve. Vi kunne nøjes med at betragte en Trekant ABC, af hvis Vinkelspidser ingen ligger paa Kurven. Siden BC dreje vi om et af dens Punkter (valgt udenfor B eller C), indtil den falder meget nær ved A, saaledes at der dannes en ny Trekant AB_1C_1, hvor Kurven kun skærer Forlængelsen af de tre Sider AB, BC, CA. Her vil Produktet af de Forhold, hvori Siderne deles af Skæringspunkterne med

Kurven, være positivt. Men dette vedbliver at gjælde, ogsaa naar Siden $B_1 C_1$ drejes tilbage til sin oprindelige Stilling BC, thi Forandring i en Faktors Fortegn kan kun ske ved, at en af Vinkelspidserne ved Drejningen overskrider Kurven, men derved skifter tillige en og kun en af de andre Faktorer sit Fortegn. Dette forandres tilmed ikke derved, at to af Skæringspunkterne mellem Kurven og den bevægelige Linie rykke sammen i et Røringspunkt og derefter forsvinde, d. v. s. man har: Produktet af de Forhold, hvori (3)
Siderne i en Trekant (eller en vilkaarlig Polygon) deles ved Skæringspunkterne med en vilkaarlig lukket grafisk Kurve er positivt.

Heraf følger specielt, at de tre Vendepunkter paa en Kurve af tredie Orden enten alle ligge paa Forlængelsen af Siderne i den af Vendetangenterne dannede Trekant eller kun det ene paa en Forlængelse, medens de to andre ligge paa selve Siderne. Naturligvis er der intet i Vejen for, at de tre Vendetangenter ogsaa kunne gaa gjennem samme Punkt.

Man vil nu have et ret fuldstændigt Overblik over de mulige Former af grafiske Kurver af tredie Orden uden Dobbeltpunkt; det er i saa Henseende i Virkeligheden tilstrækkeligt at henvise til Formerne af de algebraiske Kurver[1]).

Vi ville nu betragte Kurven af tredie Orden med Dobbeltpunkt. Det ses straks, at Kurven ikke kan have flere end et saadant. Lader man her et Punkt M løbe langs Kurven i en bestemt Retning ud fra Dobbeltpunktet O og tilbage til O, vil det have gjennemløbet en Del G_1 af Kurven; fortsættes Bevægelsen i samme Retning, til M paany falder i O, vil det have gjennemløbet en anden Del G_2, og hele Kurven vil repræsenteres ved $G_1 + G_2$ (d. v. s. Samlingen af de to Dele eller Grene). Af disse to Grene vil den ene skære en vilkaarlig ikke gjennem O gaaende ret Linie i et lige Antal, den anden i et ulige Antal Punkter. Den ene Gren, lad os sige G_2, skæres altsaa af enhver ret Linie i et lige Antal Punkter og højst i to; den maa derfor være af anden Orden, og vi ville kalde den Sløjfen; den anden Del G_1 kalde vi den ulige Gren. Hver Gren for sig fremstiller en lukket kontinuert Kurve. Et Infleksionspunkt maa i hvert Fald ligge paa den ulige Gren, thi G_2 er af anden Orden. Man ser nu som ovenfor ved Kurven uden Dobbeltpunkt, at der gjennem hvert Punkt M af Kurven maa gaa 2 eller 0 Tangenter (der røre udenfor M). Dette kan præciseres saaledes, at der gjennem et vilkaarligt Punkt af Sløjfen ikke udgaar nogen Tangent (en saadan vilde skære $G_1 + G_2$ i fire Punkter), medens der udgaar to Tangenter fra hvert Punkt M af den ulige Gren. Vælger man nemlig M nær ved Dobbeltpunktet, findes i hvert Fald en Tangent (og altsaa to), og ved at forskyde M langs G_1 kan ingen fra M udgaaende Tangent tabes. Af de to Tangenter vil én og kun én berøre Sløjfen. Dette ses nemlig straks, naar M vælges i umiddelbar Nærhed af O (thi intet Punkt af G_1 kan aabenbart ligge indeni G_2), og dette Forhold kan ikke for-

[1]) Se særlig Prof. Zeuthens Afhandling: Om Udseendet af Kurver af tredje og fjerde Orden, Tidsskrift f. Mathem. 1873. S. 97.

andres ved, at M flytter sig paa G_1, thi derved vil man hverken overskride G_2 eller nogen af de Tangenter til G_2, der berøre i O. Forbindelsen mellem Røringspunktet X for en Tangent til G_1 og Skæringspunktet Y mellem denne Tangent og Kurven er altsaa gjensidig éntydig paa hele G_1; der maa derfor efter Korrespondancesætningen finde to Sammenfald Sted, thi X og Y bevæge sig i modsatte Retninger, hvilket ligeledes ses ved at vælge X nær ved Dobbeltpunktet. Men da et Sammenfald finder Sted i O — hvilket Punkt giver Anledning til et virkeligt Sammenfald mellem X og Y paa G_1, men ikke paa $G_1 + G_2$ — haves:

(4) En Kurve af tredie Orden med Dobbeltpunkt har én og kun én Vendetangent.

Man ser tillige af Beviset, at det samme vil gjælde, naar Kurven har en Spids, der nødvendigvis maa være af 1ste Art.

Om Kurver af tredie Orden kan man ved Korrespondancesætningen bevise adskillige specielle Sætninger; saaledes:

I en Kurve af tredie Orden kan man altid indskrive to og kun to lukkede Polygoner, hvis Sider gaa gjennem hver sit givne Kurvepunkt, saafremt Sidernes Antal er ulige.

Endvidere:

Kaldes to Punkter paa en G^3 for konjugerede, naar de have samme Tangentialpunkt, vil Forbindelseslinien mellem konjugerede Punkter indhylle en Kurve, til hvilken der fra ethvert Punkt af den givne Kurve udgaar 3 Tangenter.

Man ser tillige let, at Indhyllingskurven hverken har Vendetangenter eller Dobbelttangenter.

Vi ville endnu spørge om Antallet af Tangenter, der fra et Punkt P kunne udgaa til en fuldstændig kontinuert Kurve af tredie Orden. Er denne uden Dobbeltpunkter og Spidser, saa sammensættes den efter det ovenstaaende af tre elementære Buer. Fra intet Punkt kan der altsaa udgaa flere end seks Tangenter. At der virkelig kan findes saa mange, ses af en Figur. Men Antallet behøver paa den anden Side ikke at være saa stort. Ændrer man lidt paa Fig. 4, saaledes at Skæringspunktet Z mellem to Vendetangenter rykker ned paa den anden Side af den asymptotiske Vendetangent, faar man en Kurve af tredie Orden og fjerde Klasse.

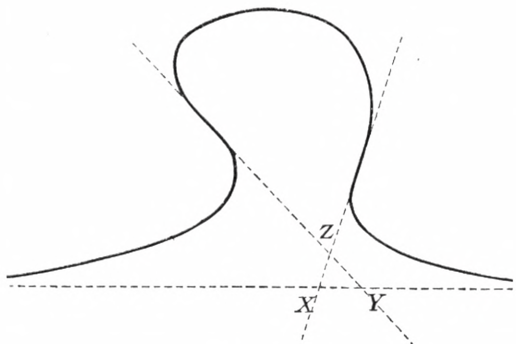

Fig. 4.

Har Kurven et Dobbeltpunkt, bliver den altid af fjerde Klasse. Ligger P nemlig inden i Sløjfen, kan der ikke derfra udgaa nogen Tangent. Ligger P derimod udenfor Sløjfen, vil der fra P til denne Sløjfe kunne drages mindst en Tangent (en anden uegentlig kan være Forbindelseslinien med Dobbeltpunktet). Lad Røringspunktet for en saadan være A. Gjennem A kan nu ingen Tangent gaa uden de to, der falde sammen i Kurvens Tangent i A. Men paa hele Linien PA vil der kun findes to Punkter, i hvilke Antallet af Tangenter udgaaende fra et bevægeligt M paa Linien kan undergaa nogen Forandring (derved, at to tabes eller vindes), nemlig det ene fra A forskellige Skæringspunkt B med Kurven og Skæringspunktet C med Kurvens eneste Vendetangent. Af de to Stykker, hvori Linien deles af Punkterne A og P, vil der nu aabenbart altid være ét, der højst indeholder et enkelt af Punkterne B og C. Fra det vilkaarlige Punkt P udgaar altsaa højst fire Tangenter. At dette Antal kan naas, ses ved f. Ex. at vælge et passende Punkt nær ved Dobbeltpunktet.

Paa en aldeles lignende Maade, nemlig ved at forbinde P med Spidsen, ses, at der til en G^3 med Spids højst kan udgaa 3 Tangenter fra P, ɔ:

Klassen for en fuldstændig kontinuert Kurve af tredie Orden uden Dobbeltpunkt eller Spids er 6 eller 4; for en Kurve med Dobbeltpunkt er Klassen 4 og med Spids er den 3. (5)

Om den almindelige Kurve kan man sige noget mere. Vi ville herved ved et Gebet med Indeks r forstaa et Gebet, fra hvis Punkter der udgaa r Tangenter. Lad nu ABC være den Trekant, der dannes af Vendetangenterne. Om enhver af Vinkelspidserne f. Ex. A ligge 4 Rum begrænsede af Vendetangenter og Kurvebuer, der i den Orden, hvori de følge paa hinanden, maa have Indices 0, 2, 4, 2 eller 2, 4, 6, 4, idet de øvrige Muligheder let ses at stride mod, at man samtidig maa tabe (eller vinde) to Tangenter ved i to nærliggende Punkter af en Vendetangent, der ikke ere skilte ved Infleksionspunktet, at overskride Vendetangenten i én og samme Retning. Da man altid langs en Vendetangent kan komme fra en af Vinkelspidserne i Trekant ABC til enhver anden uden at overskride Kurven, ville de tre Vinkelspidser enten alle karakteriseres ved Indices 2, 4, 6, 4 eller ved 0, 2, 4, 2. Da enhver Del af Kurven endvidere maa ligge i en Trekant (begrænset af Vendetangenter), fra hvis Punkter der enten udgaar 2 eller 4 Tangenter, vil man aldrig ved Overskriden af Kurven alene kunne naa over i et Gebet med Indeks 6 eller med Indeks 0.

Kurven G^3 ligger nu i 3 af de 4 Trekanter, hvori Planen deles af de 4 Vendetangenter. Fra Punkterne af den Trekant $\triangle$, hvori Kurven ikke ligger, vil der altsaa udgaa enten 0 eller 6 Tangenter. I det første Tilfælde er G^3 af 4de Klasse.

Lad nu P være et Punkt, hvorfra ingen Tangent udgaar. Alle gjennem P gaaende Linier maa da skære Kurven i det samme Antal Punkter, men dette Antal maa være 1, thi en Linie gjennem P og et af Punkterne A, B, C kan aabenbart kun skære i ét Punkt, (der specielt kan være et Infleksionspunkt). I dette Tilfælde kan man altsaa i den ovennævnte Trekant $\triangle$ indtegne en Oval G^2, saaledes, at ingen ret Linie skærer $G^3 + G^2$ i flere end 3 Punkter. Man har altsaa:

(6) Kurverne af 3die Orden kunne henføres til to Typer, den ene er af fjerde, den anden af sjette Klasse. Til en Kurve G^3 af den første Type kan man føje en Kurve G^2 af anden Orden, saaledes at $G^2 + G^3$ er af tredie Orden og sjette Klasse.

Gaa Vendetangenterne gjennem samme Punkt, kan Kurven ikke være en Del af en sammensat Kurve af tredie Orden. Vi kunne endnu opstille Sætningen:

(7) Naar en Kurve G^2 af anden Orden hverken skærer en Kurve G^3 af tredie Orden eller nogen af dens Vendetangenter, vil Antallet af Kurvernes fælles Tangenter være $2n$, naar der udgaar n Tangenter til G^3 fra et vilkaarligt Punkt af G^2.

Da det nævnte Tal efter Sætning (7) i § 3 maa være 0 eller $2n$, kommer det blot an paa at se, at der overhovedet findes mindst én fælles Tangent. Men dette er sikkert, thi da G^3 er af ulige Orden, maa den ligge helt udenfor G^2, saa at en Tangent til G^3, der skærer G^2, maa skære den i to Punkter P_1 og P_2, der bevæge sig i modsatte Retninger, naar Tangenten bevæger sig; P_1 og P_2 maa derfor nødvendigvis have Sammenfald.

Det er interessant, at man i de grafiske Kurvers Theori kan vende flere af de foregaaende Sætninger om. Vi ville her nøjes med at bevise den almindeligste af dem:

(8) En lukket fuldstændig kontinuert Kurve, der ikke har andre Singulariteter end tre Vendetangenter, maa være af tredie Orden (se Fig. 5).

Kurven G deles af Røringspunkterne A, B og C for de tre Vendetangenter a, b og c i tre Buer AB, BC og CA. Det kommer nu først an paa at bevise, at disse ere elementære Buer, hvilket efter det foregaaende vil være godtgjort, naar vi bevise, at ingen Vendetangent kan skære en af de Buer, den berører.

Lad et Punkt M gjennemløbe Kurven. Tangenten m i M maa i hver af sine Stillinger skære Kurven i det samme Antal Punkter, da G hverken har Dobbelttangenter eller Spidser; Skæringspunkternes Følgeorden paa G maa endvidere stadig være den samme, da intet Sammenfald mellem dem kan finde Sted. Lad os nu antage, at Vendetangenten a foruden i A skærer i R_1, R_2, R_3, .. R_{2n}, hvilke Punkter antages at følge paa hinanden i denne Orden, idet man gjennemløber Kurven ved først at gjennemløbe Buen AB uden at overskride C. (Paa denne Maade skal det stadig forstaas, naar vi sige, at et Punkt gjennemløber en af Buerne). Naar nu M gjennemløber Buen AB fra A til B, ville alle Punkterne R hver for sig bevare deres Omløbsretning. Lad os antage, at R_1 falder paa Buen AB. R_1 kan da ikke bevæge sig i modsat Retning af M, thi i saa Fald maatte det et Sted paa denne Bue falde sammen med M, til Trods for, at Buen er uden Singulariteter. Det kan imidlertid heller ikke bevæge sig i samme Retning, thi da maatte M, der i B skal falde sammen med R_1, her bevæge sig i samme Retning som R_1, hvilket er imod

Infleksionspunktets Definition. Der kan altsaa ikke eksistere noget Skæringspunkt mellem a og Buen AB. Da det tilsvarende maa gjælde om de andre Vendetangenter, er det nu bevist, at Kurven er sammensat af tre elementære Buer. (Allerede heraf følger det, at G højest er af 5te Orden.)

Fra et Infleksionspunkt C udgaar nu ingen Tangent til Buerne AC og BC, men 0, 1 eller 2 Tangenter til Buen AB; 0 eller 2 Tangenter er imidlertid her umulige, da Kurvens Klasse er lige ($e = 0$). Linien AC kan endelig skære hver af Buerne AB og BC i højest ét Punkt forskjelligt fra A eller C, men da Kurvens Orden maa være ulige ($e' = 3$), kunne vi antage, at Betegnelserne ere valgte saaledes, at Linien AC skærer Buen BC i ét Punkt (udenfor C) medens den ikke skærer Buen AB udenfor A.

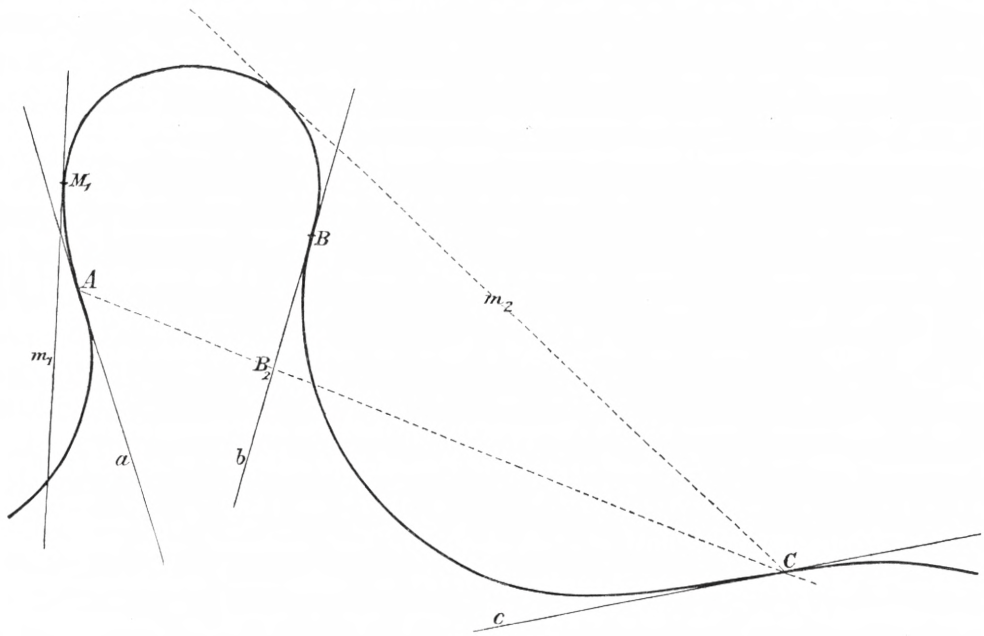

Fig. 5.

Lad b skære Linien AC i B_2 (se Fig. 5). Hvis Punktet M nu atter gjennemløber Buen AB, vil Skæringspunktet N mellem m og Linien AC gjennemløbe et bestemt af de to Stykker, hvori denne Linie deles af Punkterne A og B_2, thi Buen er elementær og har intet Punkt (udenfor A) fælles med Linien. Det paa denne Maade udhævede Liniestykke AB_2 maa være det, der indeholder C, thi fra C udgaar en Tangent m_2 til Buen AB. Naar nu M vælges i en Stilling M_1 (paa Buen AB) og nær ved A, vil af de tre eventuelle Skæringspunkter mellem m_1 og Kurven i hvert Fald ét ligge paa Buen AC efter Vendepunktets Definition. Men der kan heller ikke ligge flere. Hvis der nemlig fandtes endnu et Skæringspunkt P_1, vilde man almindeligvis ved at forskyde M_1 tilbage til A faa et fra A forskjelligt Skæringspunkt mellem a og Buen AC, hvilket er umuligt. Dog kunde det endnu tænkes, at a netop gik gjennem C, saa at P_1 vilde falde i C, naar M_1 flyttedes tilbage til A. Men heller ikke dette er muligt, thi af Vendetangentens Egenskaber følger det, at, naar der gjennem et Punkt P_1, der ligger nær ved en Vendetangent a (men ikke ved dennes Røringspunkt), gaar en Tangent til Buen AB, der rører i et ved A nærliggende Punkt, vil der ogsaa gjennem P_1 gaa en Tangent, der berører Buen AC; dette er her umuligt, da den sidstnævnte Bue er elementær. Vi have altsaa set, at, naar Tangenten m_1 skærer G i 3 Punkter (foruden i M_1), maa nødvendigvis ét og kun ét falde paa Buen AC. Disse Forhold kunde endvidere ikke ændres ved, at m gaar fra Stillingen a over m_1 til m_2, thi under denne Bevægelse er Punktet C slet ikke overskreden. Naar m nu mere og mere nærmer sig Stillingen m_2, maa af de eventuelle to Skæringspunkter mellem m og Buen BC enten intet konvergere mod C — hvilket er umuligt, da Buen BC i saa Fald af m_2 vilde skæres i 3 Punkter — eller det ene maatte konvergere mod C. Det sidste er imidlertid ogsaa umuligt, thi Liniens Skæringspunkt med Buen AC konvergerer ogsaa mod C, og Kurven har hverken Dobbelttangenter eller Spidser.

Det er altsaa bevist, at en Tangent til Buen AB, der ligger mellem Stillingerne a og m_2, kun kan skære Kurven i ét Punkt, men deraf følger, at enhver Kurvetangent netop vil skære i endnu ét Punkt (foruden i Røringspunktet). Efter Sætning 4 i § 3 vil Kurven da være af tredie Orden.

Ved denne Sætning har den grafiske Kurve af 3die Orden faaet sin fuldstændige Beskrivelse.

Vi ville nu til Slutning tage Hensyn til, at Kurven har fremspringende Punkter medens den vedbliver at være kontinuert som Punktfrembringelse. Fremspringende Punkter ere af tre væsentlig forskjellige Arter (se Figg. 6, 7, 8).

I et fremspringende Punkt O støde nemlig to Buer sammen, hvis Tangenter i O danne en vis endelig Vinkel med hinanden. Nu er det muligt, at Tangenten i et ved O nærliggende Punkt af den ene Bue skærer den anden Bue i et ved O nærliggende Punkt — enten for begge Buers Vedkommende, eller kun for den enes, eller endelig for ingen af Buernes Vedkommende. Svarende til hver af disse Muligheder ville vi (henholdsvis) sige, at Punktet O er af 1ste, 2den eller 3die Art. Naar Tangenten m i M til den ene Bue skærer i den anden Bue i P, vil P bevæge sig indad mod O, naar M gjør det, og i O ville M og P falde sammen.

Bestemmelsen af en saadan Kurve skal nu ske ved først at gjøre den fuldstændig kontinuert ved en vis Ændring i Nærheden af det fremspringende Punkt og ved dernæst igjen at ophæve Ændringen for at vende tilbage til den oprindelige Kurve (se Fig. 6, 7, 8). Operationen, at udføre denne Ændring, ville vi kalde at afrunde det fremspringende Punkt. Lad dette være O. Vi udelade da af de to Buer, der gaa herigjennem, to smaa elementære Buer $OM_1 = \mu_1$ og $OM_2 = \mu_2$, og forbinde dernæst atter M_1 og M_2 ved en lille elementær Bue σ, der ikke skærer μ_1 eller μ_2, af den Beskaffenhed, at den i M_1 og M_2 berører de oprindelige Buer, og i disse Punkter danner Spidser med μ_1 og μ_2. Disse Buer sammen med det endelige Liniestykke M_1M_2 begrænse et endeligt Rum ω_1; ligesaa vil σ i Forbindelse med M_1M_2 begrænse et endeligt Rum ω_2. Da der nu i M_1 findes en Spids, dannet af σ og μ_1, ville Nabopunkterne paa disse Buer til M_1 ligge paa samme Side af Linien M_1M_2; heraf følger, at de endelige velbegrænsede Rum ω_1 og ω_2 begge ligge paa samme Side af Linien M_1M_2. Nu skal σ udtrykkelig vælges saaledes, at Rummet ω_2 ligger helt indeni ω_1, hvilken Betingelse altid kan tænkes opfyldt, fordi σ kan vælges lige saa nær ved M_1M_2, som man selv vil. Rummet ω_1 sammensættes altsaa af ω_2 og et Rum ω_3, der begrænses af $\sigma + \mu_1 + \mu_2$.

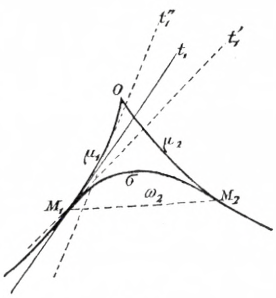

Fig. 6.

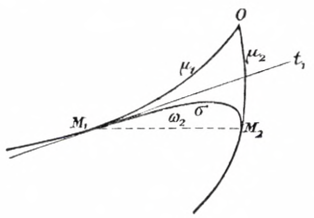

Fig. 7.

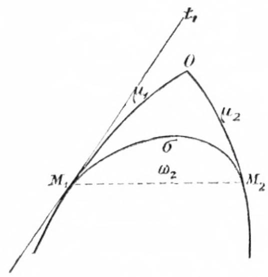

Fig. 8.

Vi skulle nu vise, at den ændrede Kurve G' er af samme Orden som den oprindelige G.

Lad først en ret Linie l skære σ i to Punkter; den kan da ikke skære M_1M_2, da denne i Forbindelse med σ danner en (ikke fuldstændig kontinuert) Linie af lige Orden. Linien l maa derfor ved Forlængelse komme ind i Rummet ω_3, og dernæst, da dette er endeligt, skære Begrænsningen $\mu_1 + \mu_2$ i mindst to Punkter. En Linie, der skærer σ i ét og kun ét Punkt, ses dernæst umiddelbart at maatte skære $\mu_1 + \mu_2$ i mindst ét Punkt, da $\sigma + \mu_1 + \mu_2$ er hele Begrænsningen af ω_3.

Efter dette er det sikkert, at ingen ret Linie kan skære den ændrede Kurve G' i flere Punkter end den oprindelige. Men Ordenen n af G kan heller ikke være bleven formindsket ved Afrundingen, naar vi blot vælge Buerne OM_1 og OM_2 tilstrækkelig smaa, thi G maatte saa være af den Beskaffenhed, at den af hver Linie, der ikke gaar gjennem O, skæres i færre end n Punkter, men af en eller flere Linier gjennem O i n Punkter; dette er aabenbart ikke muligt ved de her benyttede Bestemmelser af Skæringspunkternes Antal (hvor et Røringspunkt regnes for to Skæringspunkter med Tangenten o. s. v.)

Hvad Kurverne af tredie og fjerde Orden angaar, kan Umuligheden af ved Afrunding at formindske Ordenen allerede ses deraf, at man ikke paa den Maade kan nedbringe Ordenen til at være henholdsvis 1 eller 2.

Vi skulle nu undersøge, hvilken Art af Spids der ved Afrunding fremkommer i M_1 (og M_2) (se Fig. 6, 7, 8). Lad Tangenten i M_1 være t_1, og lad t_1' være en Nabotangent til t_1, der berører σ. Linien t_1', der forbinder to Nabopunkter af σ, maa efter det ovenstaaende nødvendigvis skære $\mu_1 + \mu_2$ i mindst to Punkter. Af disse Skæringspunkter kan højst ét falde paa μ_2, da ellers ogsaa t_1 vilde skære μ_2 i to Punkter, hvilket er mod Definitionen af de Buer, der støde sammen i O, naar disse vælges tilstrækkelig smaa; mindst ét af dem maa altsaa nødvendigvis falde paa μ_1. Men intet Skæringspunkt mellem t_1' og μ_1 kan falde i endelig Afstand fra M_1, da saa ogsaa t_1 maatte skære μ_1 i endelig Afstand fra M_1, hvilket er umuligt, da μ_1 er en elementær Bue. Vi se altsaa, at en Nabotangent til t_1, der berører σ, i alle Tilfælde maa skære μ_1 i et Nabopunkt til M_1. Det analoge gjælder om en Tangent til σ i Nærheden af M_2.

En Nabotangent t_1'' til t_1, der berører μ_1, behøver derimod ikke at skære σ i et Nabopunkt til M_1. Lad os først betragte det Tilfælde, at t_1 skærer μ_2 i et Punkt, hvilket kan indtræffe ved et fremspringende Punkt af første Art og ved (den ene Bue af) et Punkt af anden Art (se Fig. 6, 7). Her vil t_1'' skære σ i ét Punkt, da den maa skære $\mu_1 + \mu_2 + \sigma$ i et lige Antal Punkter, og dette Punkt maa være et Nabopunkt til M paa σ, thi t_1'' kan ikke skære μ_2 i to Punkter, eller μ_1 i et enkelt Punkt i endelig Afstand fra Røringspunktet, uden at ogsaa t_1 vilde skære paa samme Maade, hvilket som ovenfor nævnt er umuligt.

I dette Tilfælde vil altsaa μ_1 og σ i M_1 danne en Spids af første Art. Men μ_1 og Forlængelsen af denne Bue (langs den oprindelige Kurve) udover M_1 danner der et sædvanligt Kurvepunkt; derfor maa den nævnte Forlængelse i Forbindelse med σ i M_1 danne en Infleksion.

Lad os dernæst antage, at t_1 ikke skærer μ_2 (se Fig. 8). Nabotangenten t_1'' til t_1 berørende μ_1 vil da ikke skære μ_2, lige saa lidt som den vil have noget Punkt fælles med μ_1 udenfor Røringspunktet. Men t_1'' vil heller ikke skære σ. Den kan nemlig ikke skære σ i ét og kun ét Punkt, da den i saa Fald maatte skære $\mu_1 + \mu_2$ i et ulige Antal af enkelte Punkter til Trods for, at den her kun har Røringspunkt fælles med $\mu_1 + \mu_2$. Men den kan heller ikke skære σ i to Punkter, thi t_1'' vil i sit Røringspunkt ikke træde ud af eller ind i Rummet ω_2, hvilket i saa Fald maatte være nødvendigt efter det foregaaende. I dette Tilfælde danne altsaa μ_1 og σ i M_1 en Spids af anden Art. Da nu μ_1 og dens Forlængelse danne et sædvanligt Punkt i M_1, maa ogsaa σ og den nævnte Forlængelse sammesteds danne et sædvanligt Kurvepunkt.

Naar nu Kurven paa den anførte Maade er gjort fuldstændig kontinuert, skal den have 3 Infleksionspunkter. Af disse forsvinde efter det udviklede, naar vi ophæve Ændringen, 0, 1 eller 2 eftersom det fremspringende Punkt er af 3die, 2den eller 1ste Art. Man har altsaa:

En Kurve af tredie Orden, der med Undtagelse af et enkelt frem- (9)
springende Punkt er fuldstændig kontinuert, vil have 1, 2 eller 3 Vendetangenter, eftersom Punktet er af 1ste, 2den eller 3die Art.

Hvad nu Formerne af Kurverne angaar, er der meget lidt at tilføje, naar Formen af den fuldstændig kontinuerte Kurve forudsættes vel bekjendt, idet man nemlig begynder med at tegne de afrundede Kurver (se Fig. 9, 10, 11).

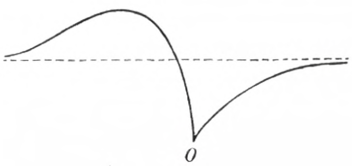

Fig. 9.

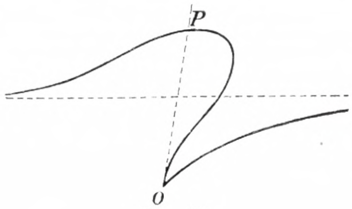

Fig. 10.

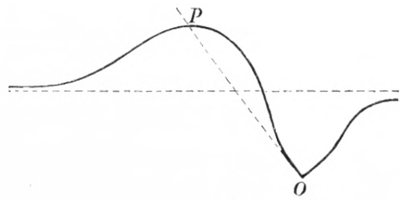

Fig. 11.

Nyttigt er det dog og nødvendigt for Læren om Kurverne af fjerde Orden at bevise de følgende Smaasætninger. Herved skal først mindes om, at man ved en uegentlig Tangent i et fremspringende Punkt O forstaar en vilkaarlig af de gjennem O gaaende Linier af den Beskaffenhed, at den ved en lille Drejning om et af sine (fra O forskjellige) Punkter P kan bringes til at skære Kurven i to ved O nærliggende Punkter; begge disse Skæringspunkter forsvinde, naar OP drejes om P en lille Vinkel i modsat Retning. En Linie gjennem O, der ikke er uegentlig Tangent, skærer Kurven kun én Gang i O. Det er klart, at ingen Linie kan være Tangent i to forskjellige Punkter til en G^3, selv om den den ene Gang skulde være uegentlig.

Af Tangenterne i et fremspringende Punkt ville enten begge, (10)
eller én af dem, eller ingen af dem yderligere skære Kurven, eftersom Punktet er af 3die, 2den eller 1ste Art.

Naar nemlig en Tangent t i O skærer Kurven i et Punkt P, maa en Nabotangent til t yderligere skære i et Nabopunkt til P; da ingen ret Linie maa skære i flere end 3 Punkter, følger nu Sætningen af den definerende Egenskab ved et fremspringende Punkt af hver af de tre Arter.

Fra et fremspringende Punkt O udgaa 0, 1 eller 2 Tangenter, der (11)
berøre udenfor O, eftersom Punktet er af 1ste, 2den eller 3die Art.

De selvsamme Slutninger, som benyttedes Side 30 til Bevis for (1) vise, at der ogsaa her fra hvert Kurvepunkt P udgaar to Tangenter; den eneste Forskel er den, at nu kan den ene af disse være en uegentlig Tangent, dannet ved at forbinde P med O. Lad os først antage, at det fremspringende Punkt er af 1ste Art, og lad os vælge et Punkt M nær ved O. Her maa Linien MO være en uegentlig Tangent, thi hvis ikke, saa vil den i

O kun skære 1 Gang, og maatte altsaa skære i endnu et Punkt N. Men den Tangent t i O, der er Nabolinie til MO, maatte da ogsaa skære Kurven i et Nabopunkt til N, hvilket efter Sætning (10) ikke er Tilfældet. Fra M udgaar altsaa kun én egentlig Tangent, der berører udenfor O, og denne ene falder sammen med en af Tangenterne i O, naar M konvergerer med O.

Hvis O derimod er af 3die Art, vil MO ingen uegentlig Tangent være, thi Linien skærer Kurven i et Punkt, der ligger i en endelig Afstand fra O, nemlig i Nabopunktet til det Punkt N, hvori den Tangent i O, der er Nabolinie til MO, ifølge det ovenstaaende paany skærer Kurven. Fra M og altsaa ogsaa fra O udgaar der da to egentlige Tangenter.

Naar O er af anden Art, kommer den ene eller den anden af de nysnævnte Muligheder til at spille en Rolle, eftersom et Nabopunkt M til O vælges paa den ene eller den anden af de to Buer, der gaa gjennem O.

Hvad Antallet af de sammensættende fuldstændig kontinuerte Buer angaar, er dette 2, 3 eller 4, eftersom det fremspringende Punkt er af 1ste, 2den eller 3die Art. Figurerne findes som i Fig. 9, 10, 11 projicerede saaledes, at Kurven faar ét og kun ét uendelig fjernt sædvanligt Punkt.

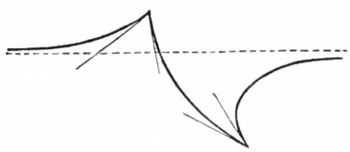

Fig. 12.

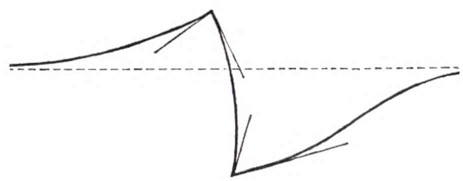

Fig. 13.

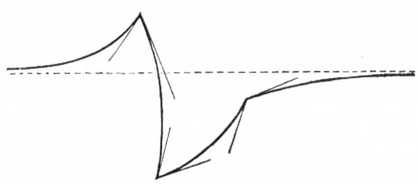

Fig. 14.

Vi ville endnu tage Hensyn til Kurver med flere fremspringende Punkter. Hvad nu først Punkterne af 3die Art angaar, kan der af disse findes lige saa mange, det skal være. Man kan jo simpelt hen omdanne en fuldstændig kontinuert Kurve ved at erstatte to smaa paa hinanden følgende Buer AB og BC med de retliniede Stykker AB og BC, og dernæst, om man vil, give de sidstnævnte en lille Krumning saaledes, at der ingen Infleksioner dannes. Saadanne Punkter kunne endvidere optræde enten alene eller ogsaa i vilkaarligt Antal sammen med andre fremspringende Punkter. Selv om nu Spørgsmaalet om Punkter af 3die Art ganske vist ikke er fuldstændig udtømt ved denne Bemærkning, ville vi dog ikke gaa videre ind derpaa, men i det følgende fuldstændig udelade at tage Hensyn til saadanne Punkter. Vi have nu:

En Kurve af tredie Orden kan ikke have flere end ét fremspringende Punkt af 1ste Art. (12)

Afrundes nemlig Spidserne, vil der fremkomme 2 Infleksionspunkter ved hvert fremspringende Punkt af 1ste Art, og den fuldstændig kontinuerte Kurve kan ikke have flere end 3 Infleksionspunkter.

Paa selvsamme Maade ses:

En kontinuert Kurve af tredie Orden med et fremspringende Punkt af 1ste Art, kan højst have ét fremspringende Punkt af 2den Art, og endvidere kan Kurven højst have 3 fremspringende Punkter af 2den Art. (13)

De tre eneste Muligheder, vi behøve at tage Hensyn til, ere altsaa:

En Kurve med et fremspringende Punkt af 1ste Art og et af 2den Art, uden Vendetangenter (Fig. 12),

En Kurve med to fremspringende Punkter af anden Art og 1 Vendetangent (Fig. 13) og

En Kurve med tre fremspringende Punkter af 2den Art uden Vendetangenter (Fig. 14).

Projiceres de som før, bliver deres typiske Form utvivlsom.

Har Kurven et Dobbeltpunkt, kan den endnu have et fremspringende Punkt O, men ogsaa kun et, hvilket maa være af anden Art. Dette ses nemlig straks af den velkjendte Form for den fuldstændig kontinuerte Kurve ved et Dobbeltpunkt, idet det fremspringende Punkt afrundes. O kan ikke ligge paa Sløjfen, og Kurvens Figur, projiceret som før, findes i Fig. 15.

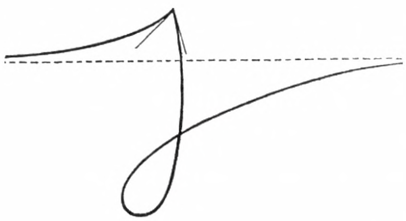

Fig. 15.

Til hver af de ovenfor beskrevne Former kan som før nævnt føjes passende bestemte fremspringende Punkter af 3die Art i vilkaarligt Antal. Saadanne Punkter kunne naturligvis ogsaa godt ligge paa en Sløjfe.

§ 5.

Kurven af fjerde Orden.

Ved Kurverne af fjerde Orden G^4 viser M Afvigelsen fra de algebraiske Kurvers Theori sig langt stærkere end ved Kurverne af tredie Orden. Væsentlig maa dette allerede være en Følge af, at her kan Antallet af Dobbelttangenter t, af Dobbeltpunkter d og af Vendetangenter e' hver for sig være større end ethvert nok saa stort givet Tal.

Som Eksempel kunne vi tage den brudte Linie, der dannes ved at dele en Cirkel i et ulige Antal Dele ved Punkterne A_1, A_2, ... A_{2n+1} (hvor $n > 1$), idet da den polygonale Linie $A_1 A_3 A_5$ ... A_{2n+1}, der løber Cirklen to Gange rundt, vil være en G^4 med $2n + 1$ Dobbeltpunkter og lige saa mange Dobbelttangenter; man kan tilmed, om man vil, ved at give Liniestykkerne en passende lille Krumning, ogsaa sørge for, at Linien bliver fuldstændig kontinuert. At en G^4 kan have et ubegrænset Antal Vendetangenter, har man et simpelt Eksempel paa i en forlænget Epicycloide, der løber Cirklen én Gang rundt og hvor det beskrivende Punkt ligger tilstrækkelig nær ved den rullende Cirkels Centrum. Derimod er Antallet af Spidser begrænset. Herved ville vi fastholde som en, om man vil, ny Vedtægt, at en Vendetangent og en Spidstangent altid skal betragtes som en Linie, der skærer i 3 sammenfaldende Punkter, da der altid i vilkaarlig Nærhed af en saadan Linie findes Linier, der skære i 3 adskilte Punkter. I Virkeligheden er denne Vedtægt kun ny paa den Maade, at den forhindrer en Dobbelttangent i samtidig at være Vendetangent og Spidstangent, eller være Vendetangent to Gange, eller Spidstangent to Gange.

Vi ville nu straks bevise:

(1) En G^4 kan ikke have flere end tre Spidser.

Denne Sætning er indbefattet i en senere, men kan ogsaa ses indirekte. Lad os nemlig antage, at Kurven havde 4 Spidser A, B, C og D. En Forbindelseslinie AB mellem to af Spidserne vil ikke yderligere skære Kurven, og man kan derfor altid — paa Grund af ovennævnte Vedtægt — vælge en Linie i Nærheden af AB, der ikke har noget Punkt fælles med Kurven. Deraf følger, at man uden Specialisering i projektiv Forstand kan gaa ud fra, at Kurven eller i hvert Fald en Projektion af den ligger helt i det endelige. Lad nu Spidsernes Benævnelser være valgte saaledes, at D ikke ligger i den endelige Trekant ABC. Men Kurven maa netop ligge i denne, da den f. Eks. skal gaa gjennem C og maa ligge helt paa den ene Side af AB. En fjerde Spids er altsaa en Umulighed. Opgiver man den særlige Vedtægt, bliver 4 Spidser mulige, hvorpaa Hypocycloiden med 4 Spidser afgiver Eksempel.

En Kurve G^4 kan derimod have lige saa mange Berøringspunkter mellem to Grene, som det skal være.

Naar et af adskilte Kurver dannet System skal være af fjerde Orden, paalægges der endvidere ikke derved Antallet af de enkelte Kurver nogen Begrænsning. Man behøver f. Eks. kun at vælge et vilkaarligt Antal Punkter, af hvilke ikke tre ligge ud i ret Linie, og omgive disse Punkter med tilstrækkelig smaa (sædvanlige) Ovaler. Det maa som en Følge deraf anses for naturligt, at vi i det følgende udelukkende holde os til en enkelt usammensat Kurve.

Vi ville nu til at begynde med lade Kurver med Spidser og Dobbeltpunkter ude af Betragtning og bevise:

Har en fuldstændig kontinuert G^4 ikke Dobbeltpunkter eller Spidser, ville de to Røringspunkter for en Dobbelttangent altid være Endepunkter for en Bue, der indeholder to og kun to Infleksionspunkter af Kurven. (2)

Lad en Dobbelttangent t røre i A og B. Man kan da altid finde en Linie, der ikke skærer Kurven og kan derfor altid gaa ud fra — eventuelt efter en Omprojektion — at Kurven ligger helt i det endelige, og udelukkende paa den ene Side af t. Enhver af de to Dele G_1 og G_2, hvori Kurven deles ved Punkterne A og B, ville i Forbindelse med det endelige Liniestykke AB — vi ville kalde det (AB) — begrænse en endelig Del (σ_1 og σ_2) af Planen[1]). Vi kunne antage, at σ_1, til hvis Begrænsning G_1 hører, ligger indeni det andet σ_2; G_1 ville vi da kalde den indre, G_2 den ydre Bue (se Fig. 16).

Man ser nu for det første, at der ikke kan findes nogen fælles Tangent t_1 til G_1 og G_2. Da nemlig t_1 i hvert Fald ikke er en Vendetangent, maa den Del af t_1, der ligger nær ved Røringspunktet T_1 med den ydre Bue, ligge paa en bestemt Side af denne, enten udenfor eller i σ_2. Men t_1 skal i hvert Fald gaa ind i σ_2 til et Punkt af G_1; derfor maa hele Linien t_1 skære Begrænsningen af σ_2 i mindst to Punkter udenfor T_1. Da der nu af disse højst ét kunde falde paa (AB), vilde t_1 skære $G_1 + G_2$ i mindst 5 Punkter.

Paa aldeles lignende Maade ses Umuligheden dels af en Dobbelttangent til G_1, dels af et Skæringspunkt mellem en Vendetangent til G_1 og selve G_1. Af det sidste følger, at der fra ethvert Punkt af G_1 udgaar det samme Antal Tangenter til G_1. Fra A og fra B maa der da ogsaa udgaa lige mange fra t forskjellige Tangenter til G_1. Det er umuligt, at der ingen saadan Tangent findes, thi paa Buen G_1 vilde der i saa Fald heller ikke findes noget Infleksionspunkt, da der fra et Kurvepunkt i dettes Nærhed vilde udgaa mindst én Tangent til G_1. Men hele G_1 maatte da være en elementær Bue, hvad der strider mod, at en saadan Tangent til G_1, hvis Røringspunkt ligger nær ved A, nødvendigvis maa skære G_2 og altsaa ogsaa G_1 i et Punkt nær ved B.

Der findes altsaa mindst én Tangent fra A og B til G_1, men der vil heller ikke findes flere end én.

Lad os nemlig dreje Linien AB om Punktet A i den Retning, at B i det første Øjeblik bevæger sig paa G_1 i Retningen fra B til A.

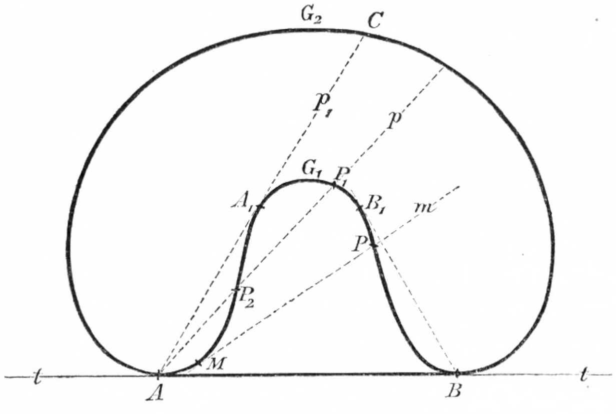

Fig. 16.

[1]) Selve Punkterne A og B regnes egentlig hverken med til G_1 eller til G_2. Naar vi f. Ex. tale om A paa G_1, menes egentlig Nabopunktet paa G_1 til A.

Til at begynde med skærer da den bevægelige Linie p Buen G_1 i to Punkter, et Punkt P_2 nær ved A og et Punkt P_1 nær ved B. Det er nødvendigt, at P_2 falder paa G_1, hvilket følger af, at Rummet σ_1 ligger indeni σ_2. Linien p maa altsaa, indtil Tangenten p_1 naas, skære G_1 i to Punkter, og begge disse maa tabes, naar p overskrider p_1. Denne Linie skærer G_2 i endnu ét Punkt C og $G_1 + G_2$ i 4 Punkter. Men nu deles σ_2 af det endelige Liniestykke AC i to fuldstændig adskilte Dele, og G_1 ligger i den ene Del og kan ikke overskride p_1. Fortsætter p sin Drejning om A over p_1, vil den altsaa slet ikke mere kunne skære G_1 inden p naar t, da G_1 ikke kan dannes af flere Buer, der støde op til hinanden i B; ɔ: fra A udgaar kun én Tangent, og ligeledes fra B. Lad den første af disse berøre i A_1 den anden i B_1.

Lad nu et Punkt M gjennemløbe G_1 fra A til B. Tangenten m i M maa begynde med at skære G_1 i et Punkt P, der ligger nær ved B, og det Punkt vil bevare sin Bevægelsesretning, naar M gjør det, da ingen Vendetangent til G_1 atter kan skære G_1. P vil altsaa kun kunne forsvinde som et Punkt af G, derved, at det overskrider Endepunktet A.

Vi skulle nu se, at Punkterne A, A_1, B_1, B følge paa hinanden i denne Orden. I Fald M nemlig først naar B_1, maa der derved vindes eller tabes et Skæringspunkt mellem m og G_1. Men det maa her vindes, thi det ovennævnte Punkt P (til at begynde med det eneste enkelte Skæringspunkt med G_1) maa første Gang tabes i A, da det stadig fjerner sig fra B. Efter at M har overskredet B_1, vilde man altsaa have en Linie m, der skar G_1 i 4 Punkter, $G_1 + G_2$ altsaa mindst i 5 Punkter. M maa derfor nødvendigvis først træffe A_1.

Naar nu M løber fra A til A_1, vil P have løbet fra B til A og kun én Gang have truffet M ɔ: paa Buen AA_1 findes ét og kun ét Infleksionspunkt. Det samme er Tilfældet paa Buen BB_1. Mellem A_1 og B_1 kan endelig intet Infleksionspunkt findes, thi det nysnævnte Punkt P er forsvunden og intet nyt Skæringspunkt mellem m og G_1 kan optræde, inden M har overskreden B_1.

Man ser, at Sætningen er uafhængig af, om der paa G_2 findes Infleksionspunkter eller Spidser eller fremspringende Punkter, blot disse ikke have noget at gjøre med G_1.

To Infleksionspunkter paa en vilkaarlig fuldstændig kontinuert Kurve af fjerde Orden, der ligge paa en af Røringspunkter med en Dobbelttangent begrænset Bue, som ikke indeholder andre Singulariteter end disse, ville vi kalde et Infleksionspar, og den tilhørende Dobbelttangent en Dobbelttangent af første Art.

I Almindelighed kan der paa G^4 optræde Infleksionspunkter, der ikke høre til Infleksionspar (isolerede Infleksionspunkter), og Dobbelttangenter, der ikke ere af første Art (men af anden Art). Paa dette Sted har vi imidlertid:

(3) Alle Infleksionspunkter paa en fuldstændig kontinuert G^4 uden Dobbeltpunkter og Spidser ordne sig i Infleksionspar.

Lad R, S og T være tre paa Kurven paa hinanden følgende Infleksionspunkter (se Fig. 17). Man skal da vise, at S enten med R eller med T danner et Infleksionspar. Ved en Bue bestemt ved to af Kurvens Punkter f. Ex. A og B forstaa vi i det følgende den Bue, der i Retningen RST gaar fra A til B. Hvis nu et Punkt M, der i denne Retning gjennemløber Buen RS, overskrider Røringspunktet for en Dobbelttangent, kunne vi vise, at S og T danne et Infleksionspar. Vi ville først vise, at, naar der paa Buen RS findes ét Røringspunkt for en Dobbelttangent, vil der paa samme Bue findes endnu ét og kun ét lignende. Efter at M nemlig har overskredet det første saadanne Punkt A, vil Tangenten m i M ikke kunne have noget fra M forskjelligt Punkt fælles med Kurven, men naar M er naaet hen til et Punkt nær ved S, vil m sikkert skære i endnu et Punkt; der maa derfor mellem A og S findes et Røringspunkt for en ny Dobbelttangent. Lad dette Røringspunkt være B, og lad samme Dobbelttangent anden Gang berøre i C. Nu kan der ikke mellem B og S findes et Røringspunkt for en yderligere Dobbelttangent. Idet nemlig M gaar fra B til S, ville Retningerne for de to enkelte Skæringspunkter mellem m og Kurven ikke kunne skifte, og de ere indbyrdes modsatte overalt, da dette finder Sted i Nærheden af B. Næste Gang et Røringspunkt for en Dobbelttangent skulde overskrides, maatte de to enkelte Skæringspunkter mellem m og G^4 tilsammen have gjennemløbet hele Kurven, og derfor maatte ét af dem have overskredet M, der bevæger sig fra B til S; dette er imidlertid umuligt, saa at der mellem B og S ikke findes noget Infleksionspunkt.

De to Punkter B og C maa nu paa G^4 efter den foregaaende Sætning begrænse en indvendig Bue indeholdende to og kun to Infleksionspunkter. Disse to maa netop være S og T, thi den Bue, der fra B gaar over R til C kan ikke være den indre Bue, da der paa den findes Røringspunktet A for en Dobbelttangent.

Paa samme Maade ses, at den Dobbelttangent, hvis Røringspunkt er A, bestemmer en indre Bue med to Infleksionspunkter, hvoraf det ene er R.

Lad os dernæst antage, at Buen RS ikke indeholder noget Røringspunkt for en Dobbelttangent. (Læser man i Teksten R', S', T' i Stedet for R, S, T, kan man atter benytte sig af Fig. 17).

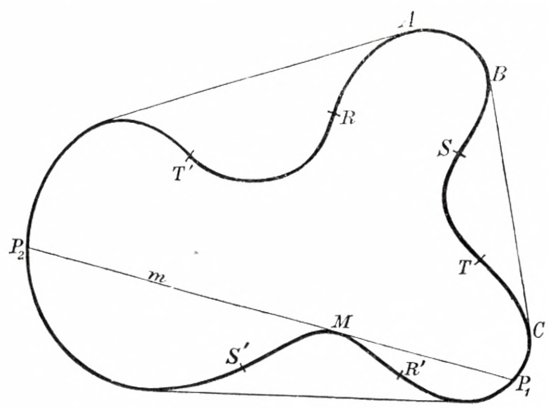

Fig. 17.

Man kan da vise, at Buen ST nødvendigvis maa indeholde saadanne. Naar M nemlig i dette Tilfælde gjennemløber Buen RS, maa af de to enkelte Punkter P_1 og P_2, som m her nødvendigvis stadig har fælles med Kurven, det ene P_1 — det, der i R falder sammen med M — til at begynde med og derfor under hele denne Bevægelse løbe i modsat Retning af M. Det andet Punkt P_2 maa imidlertid ogsaa gaa i modsat Retning af M. Under den nye Forudsætning kunne nemlig hverken P_1 eller P_2 forsvinde, og lige saa lidt gaa forbi hinanden, medens M løber fra R til S, og naar M falder i S, maa det derfor være P_2, som M nu falder sammen med, og paa det Sted løbe M og P_2 i modsat Retning. Gaar M nu videre og gjennemløber Buen ST, bevarer P_2 sin Retning, medens Retningen for P_1 skifter. Under denne Del af Bevægelsen løbe altsaa M og P_1 i samme Retning. Men det er umuligt, at under hele denne Bevægelse P_1 og P_2 have eksisteret som adskilte Punkter, thi naar M falder i T, maa det være P_1, som M der skal falde sammen med, da P_1 og P_2 ikke kunne have krydset hinanden, hvorefter Umuligheden følger deraf, at M og P_1 bevæge sig i samme Retning.

I det foregaaende have vi vel udtrykkelig antaget, at Kurven har mindst 3 Infleksionspunkter, men den sidste Del af den ovenstaaende Udvikling viser tillige, at én og kun én af de to Buer, hvori en Kurve med to Infleksionspunkter deles af disse, vil indeholde noget Røringspunkt for en Dobbelttangent; derefter viser den foregaaende Sætning, at G^4 ikke kan have flere end én Dobbelttangent. Vor Sætning er altsaa fuldstændig godtgjort, og man ser, at en G^4 uden Dobbeltpunkter og Spidser maa mindst have én Dobbelttangent.

Man er nu i Stand til at give en næsten fuldstændig Beskrivelse af Formen for disse Kurver G^4. Da der nemlig altid findes en Dobbelttangent, vil der ogsaa altid findes Linier, der ikke skære Kurven. Der ligger altsaa ikke noget specielt i, at vi lade Kurven ligge helt i det endelige. Efter at dette er opnaaet, eventuelt ved en Projektion, erstatte vi de til Dobbelttangenterne hørende indre Buer ved det endelige Stykke af den tilhørende Dobbelttangent. Denne Operation ville vi kalde at lukke for Infleksionsparrene.

Hvad der nu er tilbage vil være en kontinuert Kurve af anden Orden G^2. Selve Dobbelttangenten kan nemlig ikke have noget Punkt udenfor det nævnte endelige Stykke fælles med Kurven, og ingen enkelt Tangent kan skære i noget Punkt udenfor Røringspunktet, da ingen Skiften i Antallet af eventuelle saadanne Skæringspunkter kan finde Sted (se Sætning 4 § 3).

For at konstruere den almindeligste Kurve af fjerde Orden uden Dobbeltpunkter og Spidser — Kurver af den første Hovedtype — behøver man altsaa kun at begynde med en vilkaarlig Kurve af anden Orden og dernæst erstatte Korder i denne, der ikke skære hinanden, med passende bestemte indadgaaende Buer. De ere passende bestemte, naar en Vendetangent kun skærer i ét enkelt Punkt, og naar to forskellige af disse Buer ingen fælles Tangent have.

Idet vi nu gaa over til Kurven med Dobbeltpunkt, bevises først:

G j e n n e m e t D o b b e l t p u n k t a f e n K u r v e a f f j e r d e O r d e n u d g a a e n t e n t o e l l e r i n g e n T a n g e n t e r , d e r b e r ø r e u d e n f o r D o b b e l t p u n k t e t. (4)

Hermed er det forudsat, at Dobbeltpunktet ikke er Infleksionspunkt paa nogen af de to Buer, der gaa derigjennem.

Lad O være et Dobbeltpunkt. Forbindes O med et bevægeligt Kurvepunkt M, vil Forbindelseslinien endnu skære i et Punkt M_1, der gjennemløber hele Kurven én Gang, naar M gjør det, da M og M_1 gjensidig éntydigt bestemme hinanden; af samme Grund ville de to ogsaa enten stadig løbe i samme Retning eller stadig i modsat Retning. Findes der én Tangent fra O, maa de løbe i modsat Retning, og der vil da desuden findes én og endnu kun én Tangent udgaaende fra O.

De Dobbelttangenter, hvorfra der i k k e u d g a a r nogen Tangent, skulle siges at være af f ø r s t e A r t, de andre af a n d e n A r t. Herved maa det bemærkes, at et Dobbeltpunkt O, der tillige er et Infleksionspunkt, altid regnes for at være af anden Art; Vendetangenten regnes, om man vil, for at berøre i et Nabopunkt til O.

Man maa erindre, at det, der er bestemt, er Antallet af de Linier, der gaa gjennem O og desuden skære i to sammenfaldende Punkter. Mellem de fra O udgaaende Tangenter medregnes derfor en Forbindelseslinie mellem O og en Spids, og mellem O og et fremspringende Punkt P, saafremt OP i P er «uegentlig Tangent». Da Sætningen ogsaa gjælder, naar O selv er en Spids, have vi her det tidligere nævnte Bevis for, at en Kurve af fjerde Orden ikke kan have flere end tre Spidser.

Af væsentlig Betydning for det følgende er det nu:

A l l e D o b b e l t p u n k t e r p a a e n K u r v e a f f j e r d e O r d e n m a a n ø d v e n d i g v i s v æ r e a f s a m m e A r t, m e d m i n d r e d e r f i n d e s 3 D o b b e l t p u n k t e r. (5)

Lad os nemlig antage, at der fra et Dobbeltpunkt O_1 udgaa to Tangenter, fra et andet O_2 derimod ingen. Et Punkt M af Kurven forbindes med O_1 og O_2, og lad $O_1 M$ og $O_2 M$ desuden skære henholdsvis i M_1 og M_2. Naar nu M gjennemløber hele Kurven, maa M_1 og M_2 hver for sig gjøre det samme, og efter det forrige ville M og M_1 løbe i modsat Retning, men M og M_2 stadig i samme. Derfor løbe M_1 og M_2 i modsat Retning og maa nødvendigvis falde sammen. Dette kan kun ske i et nyt Dobbeltpunkt — da Linien $O_1 O_2$ ikke yderligere skærer Kurven — men her vil ogsaa finde t o virkelige Sammenfald Sted mellem M_1 og M_2, svarende til, at M bevæger sig paa den ene eller paa den anden af de to Buer gjennem Dobbeltpunktet. Da der overhovedet kun kan findes to Sammenfald, er det altsaa sikkert, at der i det antagne Tilfælde findes netop tre og kun tre Dobbeltpunkter. Saadanne Kurver indtage derfor en Særstilling i topologisk Henseende; idet i dette Tilfælde Dobbeltpunkterne ikke b e h ø v e at være af samme Art.

Naar man vil undersøge Formen af Kurver med Dobbeltpunkt, er det nyttigt at tænke sig Kurven sammensat af to Dele, der hænge sammen i et Dobbeltpunkt O. Man kommer utvetydigt til en saadan Del eller Gren ved ud fra et Dobbeltpunkt O at gjennemløbe hele Kurven til man første Gang paany naar O. Hver af disse Dele ere fuldstændig kontinuerte undtagen i O. Hele Kurven forudsættes nemlig fuldstændig kontinuert, og hver af de sammensættende Dele maa, idet Dobbeltpunktets Tangenter forudsættes adskilte, have et fremspringende Punkt i O; thi man kan ikke, den første Gang man vender tilbage til O, bevæge sig i samme Retning som den, hvori man gik ud; Kurven vilde nemlig i saa Fald være grafisk sammensat, hvilket her skal være udelukket.

Svarende til hvert Dobbeltpunkt kan Kurven saaledes deles i to «Grene»[1]. Den benyttede Operation ville vi kalde at overskære eller dele Kurven i et Dobbeltpunkt (se f. Ex. Figur 21) og de to Grene, der herved dannes, skulle siges at høre til Dobbeltpunktet.

Vi ville nu ved den anden Hovedtype for Kurver af fjerde Orden forstaa Samlingen af de Kurver, hvis Dobbeltpunkter alle ere af 1ste Art.

Om disse har man:

(6) En Kurve af fjerde Orden med lutter Dobbeltpunkter af første Art har foruden Dobbelttangenter af første Art med tilhørende Infleksionspar ikke andre Singulariteter end lige saa mange Dobbelttangenter af anden Art som Dobbeltpunkter (se Fig. 18 og 19).

De to Grene G_1 og G_2, hvori Kurven deles ved Overskæring i et Dobbeltpunkt O, maa her være af lige Orden. Ellers vilde de nemlig være af tredie Orden, og der vilde da fra O udgaa Tangenter til Kurven. Dette er vist tidligere i § 4 for de Kurvers Vedkommende, hvor det fremspringende Punkt er af 2den eller 3die Art; men det er almengyldigt, thi naar O paa den ene Gren er af 1ste Art, maa det paa den supplerende Gren være af 3die Art. Denne sidste Bemærkning gjælder ikke, naar en af Buerne gjennem O dér har et Infleksionspunkt, men dette indtræffer ikke her, da O i saa Fald ikke skal regnes som et Dobbeltpunkt af første Art.

Dobbeltpunkter paa Kurven kunne enten fremkomme ved, at de to Grene G_1 og G_2 hørende til samme Dobbeltpunkt skære hinanden, eller derved, at der findes Dobbeltpunkter paa hver af Grenene for sig. Den sidste Mulighed kan ikke indtræffe for Kurverne af den Gruppe, vi i dette Øjeblik betragte. Lad nemlig O_1 være et Dobbeltpunkt paa G_1, der ikke ligger paa G_2. Enhver ret Linie gjennem O_1 skærer G_2 i det samme Antal Punkter, thi en Ændring i dette Antal kan under Drejning om O_1 kun ske enten ved at overskride en fra O_1 til G_2 udgaaende Tangent, og saadanne eksistere her ikke — eller muligvis ved at overskride Forbindelseslinien med det fremspringende

[1]) Da vi overhovedet ikke betragte Kurver, der ere sammensatte af flere helt adskilte og hver for sig fuldstændig kontinuerte Dele, kan en Forveksling med en anden Sprogbrug indenfor de algebraiske Kurvers Omraade ikke befrygtes.

Punkt O. Ved den sidste Overgang kan der imidlertid heller ingen Ændring ske, da G_2 kun har et enkelt fremspringende Punkt, og Ændringer i Antallet af Skæringspunkter i hvert Fald maatte ske et lige Antal Gange svarende til en Drejning paa 180°. Enhver ret Linie gjennem O_1 skærer derfor G_2 i mindst to Punkter, da man altid kan skaffe en Linie, der skærer i ét Punkt, og G_2 er af lige Orden. Dette maatte da ogsaa gjælde om de to Dobbeltpunktstangenter i O_1 til G_1, men en saadan Linie vilde da skære $G_1 + G_2$ i mindst 5 Punkter, hvilket er umuligt.

Lad en Tangent t_1 i O skære Kurven udenfor O i et Punkt N_1, der antages at ligge paa Grenen G_1 (se Fig. 18 og 19). Naar nu en Linie m_1 drejer sig om O ud fra Stillingen ON_1 til den ene eller den anden Side, vil der optræde et Skæringspunkt M_2 mellem m_1 og Kurven $G_1 + G_2$ enten paa den ene eller paa den anden Side af O d. v. s. enten paa G_1 eller G_2. Lad os antage, at et Punkt M_1, bevæger sig paa Grenen G_1 til en saadan Side, at det fjerde Skæringspunkt M_2 ogsaa til at begynde med befinder sig paa G_1, og lad M_1 bevæge sig fra N_1 indtil det første Gang falder i O. Den sidste Stilling for $m_1 = OM_1$ bliver da den anden Tangent t_2 i O[1]). Under denne Bevægelse kan M_1 ikke have overskredet sin Begyndelsesstilling N_1; men deraf følger, at Linien $m_1 = OM_1$ ikke kan have overskredet Stillingen t_1 uden at skære Kurven i flere end 4 Punkter, hvilket er umuligt. Men lige saa lidt kan m_1 ved sin Bevægelse have overskredet t_2, thi da Linien OM_1, naar der ingen Tangent udgaar fra O, stadig maa dreje sig i samme Retning om O, saa maatte den for til Slut at ende i t_2 nødvendigvis ogsaa en Gang have overskredet t_1, hvilket, som ovenfor sagt, er umuligt. Men da Punktet M_2 kun over O kan gaa over fra Grenen G_1 til G_2, saa maa det fra O forskjellige Skæringspunkt mellem t_2 og Kurven ogsaa blive paa G_1. Vi have altsaa bevist, at begge Tangenterne t_1 og t_2 skære den samme Gren G_1. Den derved bestemte G_1 kalde vi den ydre Gren, medens G_2 er den indre.

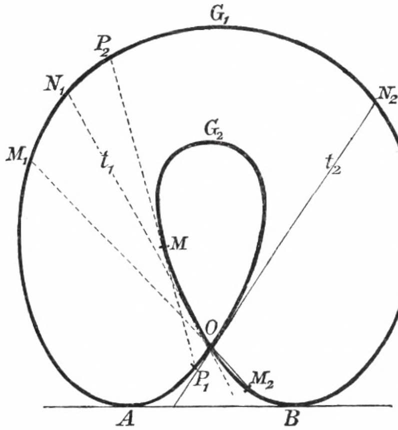

Fig. 18.

Lad et Nabopunkt M til O paa G_2 være saaledes bestemt, at OM bliver Nabolinie til t_1. Tangenten m i M maa da skære den anden gjennem O gaaende Bue i et Nabopunkt P_1 til O. Men P_1 maa udtrykkelig ligge paa G_1, thi m berører G_2 i M og vides desuden at skære G_1 i et enkelt Punkt N_1', der er Nabopunkt til det ovenfor nævnte Punkt N_1; den maa derfor skære G_1 i endnu et Punkt. Det selvsamme gjælder, naar vi

[1]) Den sidste Stilling kan ikke være t_1, thi m_1 vilde under Drejningen paa 180° da have overskredet t_2, der i saa Fald maatte skære i flere end 4 Punkter.

vælge et saadant Nabopunkt M til O paa G_1, at OM bliver Nabolinie til t_2. Ifølge Definitionerne Side 36 se vi altsaa, at Punktet O paa den ydre Gren maa være et fremspringende Punkt af 1ste Art og paa den indre af 3die Art.

Lad os nu betragte den indre og den ydre Gren hver for sig, og lad os paa begge afrunde det fremspringende Punkt paa den tidligere Side 36 beskrevne Maade. Herved vil der paa den ændrede nu fuldstændig kontinuerte indre Gren G_2 ikke optræde noget nyt Infleksionspunkt, saa at alle eventuelle Infløksionspunkter paa G_2 saavel før som efter Ændringen maa tilhøre Infleksionspar, og alle eventuelle Dobbelttangenter maa være af 1ste Art. Paa den ydre Gren vil der derimod, da det fremspringende Punkt O her er af 1ste Art, optræde to nye Infleksionspunkter, der ligge lige saa nær ved O, som man selv vil. Disse maa tilhøre samme Infleksionspar; hvis dette nemlig ikke var Tilfældet, saa vilde de skilles ved et Røringspunkt for en Dobbelttangent til den ændrede Kurve, hvilket er umuligt, thi, naar der ingen Tangent gaar fra O til G_1, saa kan der heller ingen Tangent gaa i vilkaarlig Nærhed af O, der berører i et Punkt i endelig Afstand fra O. Til dette Infleksionspar hører en aldeles bestemt Dobbelttangent, der berører i to saadanne Punkter A og B, at der paa den indre Bue AB, hverken findes noget Røringspunkt for en Dobbelttangent eller noget fra de 2 tilkomne forskjelligt Infleksionspunkt. Ophæves nu Ændringen, bliver AB den eneste Dobbelttangent, der ikke er af 1ste Art, og det af de to Buer OA og OB (med henholdsvis udelukket B og A) sammensatte Kurvestykke, bevarer den nysnævnte Egenskab ved den indre Bue.

Vi mangle endnu at vise, at der ikke findes andre Dobbelttangenter af anden Art end de nysnævnte, hvoraf der findes én svarende til hvert Dobbeltpunkt.

Vi ville herved først betragte Bevægelsen af de to Punktèr P_1 og P_2, hvori Kurven skæres af Tangenten m i et Punkt M, der paa den ovennævnte Bue OA bevæger sig fra O til A. De to Punkter befinde sig, naar M er nær ved O, efter det tidligere nævnte, begge paa G_1, og dette vil blive ved, thi ingen Tangent gaar gjennem O eller berører G_2. De to Punkter maa endvidere stadig bevæge sig i indbyrdes modsatte Retninger, thi dette finder Sted, naar M er i Nærheden af A, og Buen OA indeholder intet Infleksionspunkt.

Lad dernæst et Punkt M bevæge sig paa Fortsættelsen af Buen AO fra O ind paa den indre Gren G_2, indtil et nyt Dobbeltpunkt naas. Til at begynde med maa de to Skæringspunkter P_1 og P_2 mellem Kurven og Tangenten m i M atter begge befinde sig paa G_1, men de to Punkter maa nu bevæge sig i samme Retning; det ene og kun det ene af de to Punkter P har nemlig skiftet Bevægelsesretning, idet Punkt M paa en kontinuert Bue har overskredet O.

Lad os nu først tage Hensyn til det Tilfælde, at Kurven kun har det ene Dobbeltpunkt O. Af det nysnævnte følger da, at den indre Gren G_2 maa være af anden Orden, og at denne ingen fælles Tangenter kan have med G_1; M paa G_2 kan nemlig ikke falde sammen med P_1 eller P_2, der begge ligge paa G_1, og lige saa lidt kunne P_1 og P_2 falde sammen, da de bevæge sig i samme Retning.

Man er nu sikker paa Formen af en Kurve af fjerde Orden med ét Dobbeltpunkt af 1ste Art (se Fig. 18). Da der nemlig findes mindst én Dobbelttangent, kan man uden Specialisation gaa ud fra, at Kurven ligger helt i det endelige. Er dette opnaaet, bliver det en veldefineret Operation at lukke for Infleksionsparrene. Saadanne findes efter det nysnævnte kun paa den ene G_1 af de to til Dobbeltpunktet O hørende Grene. Udelades den anden Gren G_2, og erstatter man paa G_1 de oftnævnte Buer OA og OB med det endelige Liniestykke AB, faar man en Kurve af 2den Orden, hvilket ses aldeles som tidligere Side 46. Konstruktionen bliver altsaa følgende: man begynder med en (i det endelige beliggende) Kurve Γ af anden Orden, der er fuldstændig kontinuert med Undtagelse af et retliniet Liniestykke AB. Indeni Kurven vælges et Punkt O og derigjennem to Linier t_1 og t_2, der skulle være Tangenter i O; disse skulle vælges som Linier, der skære det endelige Liniestykke AB, thi t_1 (og t_2) skærer Γ i to Punkter, men G_1 i ét Punkt. Dernæst erstattes Liniestykket med to elementære Buer OA og OB, der i A og B berøre Γ, og i O de to Linier t_1 og t_2 saaledes, at der i O kommer et fremspringende Punkt af 1ste Art. Dernæst tilføjes helt inden for Γ en anden Grads Kurve (som Sløjfe), der i O slutter sig kontinuert til Buerne OA og OB. Paa den ydre Bue kan man dernæst ligesom ved Kurverne af første Gruppe tilføje passende bestemte Infleksionspar paa den Bue AB, der ikke indeholder O.

Lad os dernæst antage, at Kurven har flere end ét Dobbeltpunkt; den kan da for det første atter i al Almindelighed antages at ligge helt i det endelige (se Fig. 19). Deles Kurven ud fra et Dobbeltpunkt O i to Grene G_1 og G_2, hvor G_1 er den ydre Gren, og lukke vi for eventuelle Infleksionspunkter og erstatte endelig ligesom i det nysnævnte specielle Tilfælde Buerne OA og OB med det endelige Liniestykke AB, vil dette i Forbindelse med den eventuelt ved Udeladelse af Infleksionsparrene ændrede Gren G_1 danne en Kurve Γ af 2den Orden. Da nu G_2 skal begynde og ende i O, der ligger inden i Γ, maa G_1 skære Γ i et lige Antal Punkter, og af disse kan intet ligge paa Liniestykket, da Kurven er af fjerde Orden.

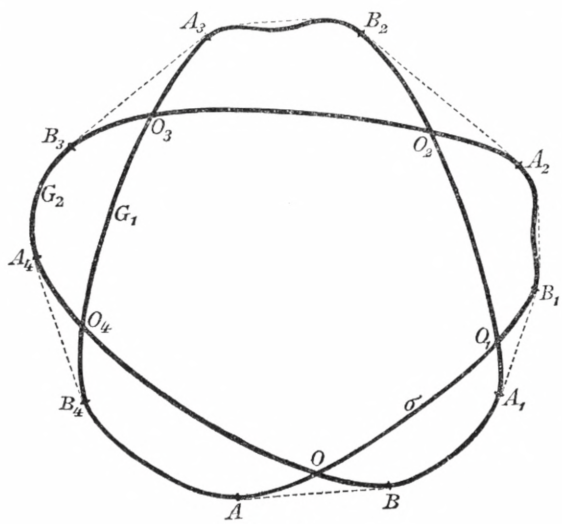

Fig. 19.

Man har altsaa:

(7) Naar en Kurve af fjerde Orden skal have lutter Dobbeltpunkter af 1ste Art, maa disses Antal være ulige.

Lad nu Dobbeltpunkterne tagne i den Orden, hvori de følge paa hinanden f. Ex. paa G_2 være O, O_1, O_2, ... O_{2n-1}, O_{2n}. Vi kunne da vise, at der paa den Bue af G_2, der ligger mellem O og O_1 (med Udelukkelse af O_2 ...), hverken findes noget Infleksionspunkt eller noget Røringspunkt for en Dobbelttangent. Dette er nemlig en Følge af det ovenfor Side 50 beviste, at de to Skæringspunkter P_1 og P_2 mellem Kurven og Tangenten m i et Punkt M af G_2, naar dette er nær ved O, begge ville befinde sig paa G_1 og endvidere bevæge sig i samme Retning, hvilket Forhold kun kan ændres ved, at M overskrider Røringspunktet for et nyt Dobbeltpunkt. Udelade vi derfor af hele Kurven den nævnte Bue OO_1, tabes derved sikkert nok hverken noget Infleksionspunkt eller nogen Dobbelttangent. Ud fra O_1 kan man nu paany dele Kurven i en ydre og en indre Gren. Til den sidste hører den nys betragtede Bue O_1O efter Kjendetegnene paa en saadan, nemlig at de tidligere nævnte Punkter P_1 og P_2 bevæge sig i modsatte Retninger paa Kurven, naar M bevæger sig paa Buen. Fra O_1 til det næste Dobbeltpunkt O_2 gaa dernæst en anden Del af samme indre Bue, hvilken heller ikke indeholder hverken noget Infleksionspunkt eller noget Røringspunkt for en Dobbelttangent. Man kan altsaa uden at ændre hverken Antallet af Infleksionspunkter eller af Dobbelttangenter stadig udelade Buer af indre Grene, der forbinde O med O_1, O_1 med O_2 ... O_{2n-1} med O_{2n}, O_{2n} med O. Den Restkurve R^4, der bliver tilbage, dannet af Buer af Grene, der ere ydre svarende til de Dobbeltpunkter, de indeholde, er nu en kontinuert Kurve, der har $2n + 1$ fremspringende Punkter af 1ste Art. Afrundes disse, faar man en fuldstændig kontinuert Kurve, der kun har Dobbelttangenter af 1ste Art og kun Infleksionspunkter i Infleksionspar. Som før, ser man nu, at de to nye Infleksionspunkter, der ved Afrundingen fremkomme ved et fremspringende Punkt, høre til samme Infleksionspar. Ophæves derfor Afrundingen, optræde paa den ændrede Kurve R^4, og altsaa ogsaa paa den oprindelige, lige saa mange Dobbelttangenter af 2den Art, som der findes Dobbeltpunkter. Endvidere optræde ogsaa alle Infleksionspunkter kun i Infleksionspar. Den i (6) opstillede Sætning er nu endelig fuldstændig bevist, men tillige have vi vundet tilstrækkelig Herredømme over Figuren til at kunne give en Beskrivelse af den almindeligste Kurve af den anden Hovedtype (se Fig. 19).

Kurven kan for det første antages at ligge helt i det endelige. Dernæst kan man lukke for eventuelle Infleksionspar og yderligere tilføje de endelige Stykker AB, $A_1\ B_1$ ... $A_{2n}\ B_{2n}$ af Dobbelttangenterne af 2den Art, der ligge mellem Røringspunkterne A og B, A_{2n} og B_{2n}. Udelader man endelig som ovenfor Bueparrene OA og OB og de dermed analoge O_1A_1 og O_1B_1 ... $O_{2n}A_{2n}$ og $O_{2n}\ B_{2n}$, dannes en Kurve Γ af anden Orden; Betegnelsen A og B kuune tænkes valgte saaledes, at Punkterne A, B, A_1 ... $A_{2n}\,B_{2n}$ følge paa hinanden i denne Orden paa Γ. Erindrer man nu den ovenstaaende Dannelse af en Restkurve R^4 ved Udeladelse af indre Buer OO_1, O_1O_2 ses det, at man gaar langs Kurven fra A til O, dernæst fra O til O_1 og endelig fra O_1 til B_1 uden at træffe hverken noget Infleksionspunkt eller noget Røringspunkt for en Dobbelttangent. Denne Bue AOO_1B_1 maa være elementær, da Tangenterne i Buens Endepunkter ere Dobbelttangenter til Kurven, der altsaa ikke kunne skære Kurven i noget enkelt Punkt.

Konstruktionen af Kurven (se Fig. 19) faar man altsaa ved at begynde med en helt i det endelige beliggende Kurve Γ af anden Orden, der er fuldstændig kontinuert med Undtagelse af et vist ulige Antal af retlinede Stykker, der i den Ordeu, hvori de findes paa Γ, benævnes AB, A_1B_1 ... $A_{2n}B_{2n}$. Man forbinder dernæst A med B_1 ved en elementær Bue σ, der i A og B_1 slutter sig kontinuert til Buerne $B_{2n}A$ og B_1A_2. Den søgte Kurve gaar dernæst udover σ videre langs Buen B_1A_2 af Γ, dernæst langs en elementær Bue fra A_2 til B_3 og saaledes videre til man ender i A. Det i Forbemærkningerne Side 42 til dette Afsnit nævnte Eksempel paa en Kurve af fjerde Orden med et vilkaarligt stort Antal af Dobbeltpunkter er, som man ser, i Virkeligheden det typiske Eksempel paa en almindelig Kurve med lutter Dobbeltpunkter af 1ste Art.

Naturligvis kan man efter Udførelsen af den ovennævnte Konstruktion tilføje Infleksionspar. Disse maa efter vor Theori alle ligge paa Buerne BA_1, B_1A_2 ... $B_{2n}A$; man behøver blot af disse Kurvedele at afskære en vilkaarlig Bue ved en Korde, og dernæst erstatte Korden med en tilstrækkelig lidt indadgaaende Bue α. Den er tilstrækkelig lidt indadgaaende, naar ingen Tangent til α skærer nogen anden ydre Bue paa Restkurven R^4 og heller ikke nogen anden Bue α beliggende paa samme Bue B_sA_{s+1}.

Denne Konstruktion er i Virkeligheden i Praksis meget brugbar til at tegne en Kurve af den her behandlede Art med et opgivet Antal af Dobbeltpunkter. Den ligger, som man ser, paa hvad man kan kalde den omskrevne Kurve af anden Orden. Der findes dog ogsaa andre, idet man kan gaa ud fra den af Dobbeltpunkterne dannede Polygon, der maa være konveks. Dette bevises aldeles som ved Kurverne af den fjerde Hovedtype (se Side 75).

Det er muligt, at to Skæringspunkter mellem en indre og en ydre Gren svarende til samme Dobbeltpunkt kunne falde sammen i O_r. Man kan da sige, at to Dobbeltpunkter falde sammen i ét Punkt samtidig med, at to Dobbelttangenter falde sammen i en Linie t_r. Man kan imidlertid ogsaa sige, at O_r er et enkelt Dobbeltpunkt med sammenfaldende Dobbeltpunktstangenter og Dobbelttangenten t_r regnes da ogsaa kun for enkelt.

Holde vi ubetinget fast ved, at de Kurver, vi ville behandle, skulle være grafisk usammensatte, kan ikke hvert af Kurvens Dobbeltpunkter have sammenfaldende Tangenter. Konstruktionen faas let af den ovenstaaende.

Vi ville endnu undersøge, hvilke Kurver med Spids, der kunne findes i den første Hovedgruppe. Af Sætning (4) følger, at disse Kurver højst kunne have én Spids. Deres

Form kan vel bestemmes direkte, men simplere er det at gjøre Brug af den følgende lille Hjælpesætning, der ogsaa for de andre Formers Vedkommende skal benyttes paa samme Maade. Herved ville vi ved en Sløjfe forstaa en saadan til et Dobbeltpunkt O hørende Gren, der ikke gaar gjennem noget yderligere Dobbeltpunkt, men naturligvis i O har et fremspringende Punkt.

(8) Naar en Kurve (af fjerde Orden) har en Spids, kan man altid ved en lille Ændring af Kurven i Nærheden af Spidsen, men uden yderligere at forandre den, skaffe en Kurve med Sløjfe.

Operationen bestaar i, at man løsner Forbindelsen mellem de to Buer, der i Spidsen O støde sammen og trykke disse lidt ind mod hinanden og endelig forbinder de frie Ender A og B med en lille elementær Bue, der i A og B uden at danne Spidser slutte sig kontinuert til den øvrige Kurve (se Fig. 20). Derved dannes en Sløjfe, der omslutter O. At Kurvens Orden ikke forøges ved Ændringen, følger af, at en vilkaarlig Linie gjennem O højst skærer den oprindelige Kurve i to Punkter med endelig Afstand fra O, og en Nabolinie til Spidstangenten i højst ét saadant Punkt; det samme maa nemlig ogsaa gjælde om Linier, der ligge tilstrækkelig nær ved de nævnte. Af Definitionen for fremspringende Punkter (se Side 36) følger, at Sløjfens fremspringende Punkt vil være af 1ste eller 2den Art, eftersom Spidsen er af 1ste eller 2den Art.

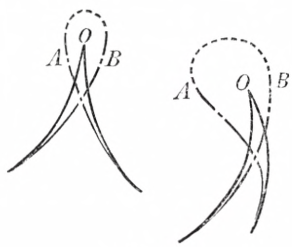

Fig. 20.

Da man ved de hidtil betragtede Kurver kun da kan have en Sløjfe, naar Kurven kun har et enkelt Dobbeltpunkt, har man:

(9) Naar en Kurve af fjerde Orden skal have en Spids, hvorfra ingen Tangenter udgaar, vil den ikke yderligere kunne have Dobbeltpunkter af 1ste Art, og af Dobbelttangenter én af 2den Art foruden et vilkaarligt Antal af 1ste Art med tilhørende Infleksionspar.

Formen, der er utvivlsom ifølge Fig. 18, ligner i alt væsentlig Kardoidens bekjendte Figur.

Forstaa vi ved t_1 og t_2 Antallet af Dobbelttangenter henholdsvis af 1ste og 2den Art, ved d Antallet af Dobbeltpunkter og ved e' Antallet af Infleksionspunkter, har man efter det udviklede

$$t_1 = \tfrac{1}{2}e' \text{ og } t_2 = d,$$

altsaa

$$t_1 + t_2 = t = d + \tfrac{1}{2}e'$$

(10) ɔ: Antallet af Dobbelttangenter er lig med Antallet af Kurvens Dobbeltpunkter forøget med det halve Antal af Infleksionspunkter.

Spids regnes ved disse Kurver som ét Dobbeltpunkt; hvad Berøringspunkter mellem to Grene angaar, kan man efter frit Valg benytte enten den ene eller den anden af de nederst Side 53 nævnte Opfattelser.

Vi skulle, efterhaauden som vi faa samtlige Kurveformer bestemte, eftervise, at denne Relation er gyldig i alle Tilfælde, hvor der overhovedet findes Dobbelttangenter. Dette er nemlig ikke altid Tilfældet, som vi skulle se ved Kurverne af den næste Type.

Vi ville ved Kurverne af den tredie Hovedtype forstaa Samlingen af de Kurver, hvor de Grene, der høre til et Dobbeltpunkt, kunne være af ulige altsaa af tredie Orden. Man kan ikke sige, at en saadan Kurve ubetinget skal sammensættes af to Grene af ulige Orden, thi selv om dette finder Sted ved Overskæring i ét Dobbeltpunkt, er det muligt, at Kurven ved Overskæring i et andet Dobbeltpunkt deles i to Grene af lige Orden.

Man har her følgende Sætning:

En Kurve af fjerde Orden, der kan deles i to Grene af 3die Orden, maa have mindst 2 og højst 3 Dobbeltpunkter. (11)

Tænke vi os Delingen i de to Grene G_1 og G_2 af ulige Orden foretagen ud fra et Dobbeltpunkt O, ville begge være fuldstændig kontinuerte undtagen i O, hvor de have et fremspringende Punkt. Afrundes nu dette paa den tidligere Maade, ville de nydannede Kurver ikke længere have noget Punkt fælles i O; de maa derfor have mindst ét Skæringspunkt udenfor O. Grenene G_1 og G_2 maa altsaa have mindst ét Punkt udenfor O fælles. Men flere end ét Punkt kunne de ikke have fælles; hvis nemlig O_1 og O_2 vare to fra O forskjellige Skæringspunkter, vilde Linien $O_1 O_2$ skære saavel G_1 som G_2 i et nyt Punkt, d. v. s. Kurven $G_1 + G_2$ i 6 Punkter, hvilket er umuligt.

Et tredie Dobbeltpunkt kan derimod optræde ved, at en af Grenene selv faar et Dobbeltpunkt med en sædvanlig Sløjfe. Begge Grene kunne dog ikke have Dobbeltpunkt, thi Forbindelseslinien mellem disse to Dobbeltpunkter vilde skære $G_1 + G_2$ i 6 Punkter.

Gruppen indeholder altsaa to adskilte Samlinger, nemlig Kurver med to og Kurver med tre Dobbeltpunkter. Om de første har man:

En Kurve af fjerde Orden, der er sammensat af to Grene af ulige Orden og har to Dobbeltpunkter, har, foruden disse, ikke andre Singulariteter end 4 (isolerede) Infleksionspunkter. (12)

Kurven kan for det første ingen Dobbelttangenter have, thi en saadan vilde skære Kurven i 6 Punkter.

Lad os endvidere først antage, at ingen af de gjennem det ene Dobbeltpunkt O gaaende Buer dér har et Infleksionspunkt; Punktet O maa da enten paa begge de to til O hørende Grene være fremspringende af 2den Art, eller paa den ene Gren af 1ste og paa den anden af 3die Art. I begge Tilfælde forefindes efter Sætning (9) i § 4 fire

Infleksionspunkter paa begge Grene tilsammen. Infleksionspar forekomme ikke, da der ingen Dobbelttangenter findes.

Det samme vil gjælde, selv om der falder et Infleksionspunkt i O, thi de Tilfælde, hvor der synes at ville komme flere end 4 Infleksionspunkter i alt, kunne vises at være umulige. Det er nemlig umuligt, at en Vendetangent, der berører i O, paany kan skære Kurven. Efter Sætning (10) i § 4 kan der altsaa ikke findes noget Infleksionspunkt faldende i O, naar dette Punkt er fremspringende af 2den Art paa begge Grene, eller naar det er fremspringende af 3die Art paa én af Grenene. Disse Tilfælde, der ere de eneste, hvor en af to Grene af tredie Orden kontinuert sammensat Kurve kunde have flere end 4 Infleksionspunkter, ere altsaa her udelukkede, da Kurven skal være af fjerde Orden.

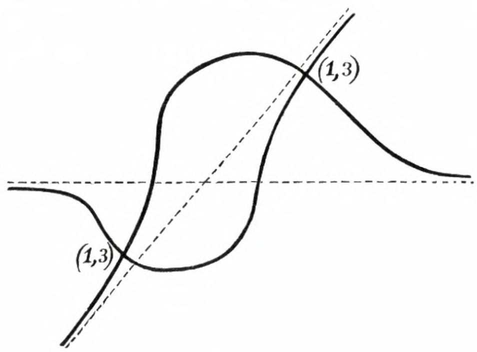

Fig. 21.

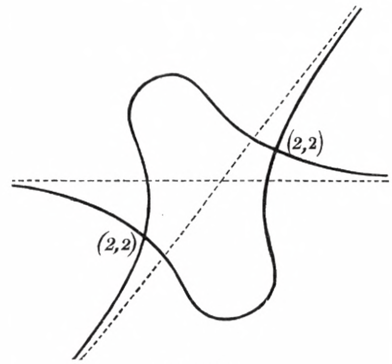

Fig. 22.

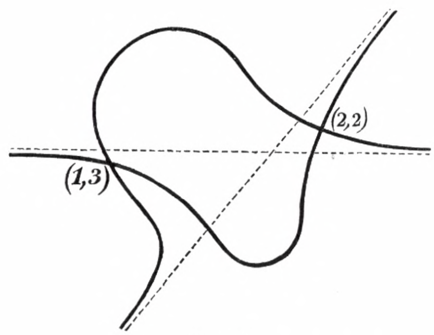

Fig. 23.

Idet vi nu ville angive Figuren af Kurverne af den tredie Type, ville vi for Kortheds Skyld udelade de Kurver, hvor der falder noget Infleksionspunkt i et Dobbeltpunkt. Disse Former ligne, som man hurtigt ser, i høj Grad de angivne. Der bliver da efter vort Inddelingsprincip tre Muligheder:

1) Ved Overskæring i begge Dobbeltpunkter dannes én Gren med et fremspringende Punkt af 1ste Art (og én med et Punkt af 3die Art). Formen findes i Fig. 21 projiceret

saaledes (her som i de følgende Figurer), at Kurven faar to uendelig fjerne sædvanlige Kurvepunkter (de to Tal, der findes ved et Dobbeltpunkt i Figuren, angive Arten af de to Punkter, der dannes ved Overskæring i Punktet, f. Ex. (2, 2), at der kommer to fremspringende Punkter af anden Art); den er sammensat af to Kurver af Form som i Fig. 9 og Fig. 11 (Side 30).

2) Ved Overskæring i begge Dobbeltpunkter dannes et fremspringende Punkt af 2den Art (se Fig. 22).

3) Ved Overskæring i det ene Dobbeltpunkt O dannes et fremspringende Punkt af 1ste (og et af 3die) Art; ved Overskæring i det andet et fremspringende Punkt af 2den Art (se Fig. 23).

Tegningen er simpelt hen sket ved at sammenføje to fra den forrige § velkjendte Former; tillige maa man dog udtrykkelig sørge for, at der ikke bliver nogen fælles Tangent til de to Grene, i hvilket Tilfælde det ifølge Sætn. 4 i § 3 er sikkert, at Kurven er af fjerde Orden[1]).

En Kurve af fjerde Orden, der er sammensat af to Grene af ulige Orden og har tre Dobbeltpunkter, vil foruden disse ikke have andre Singulariteter end to isolerede Infleksionspunkter. (13)

Kurven kan, som ovenfor nævnt, kun faa 3 Dobbeltpunkter derved, at den ene Gren G_1 af de to Grene G_1 og G_2, hvori Kurven deles ved Overskæring i O, selv faar et Dobbeltpunkt O_2. Lad os først antage, at Dobbeltpunktet O ikke ligger paa Sløjfen. Det fremspringende Punkt af G_1, der falder i O, maa da enten være af 3die eller af 2den Art, thi udelader man Sløjfen af G_1, vil denne derved faa et fremspringende Punkt af 1ste Art (jfr. § 4 Sætn. 12). Eftersom det ene eller det andet finder Sted, vil G_1 ifølge § 4 Sætn. 9 have henholdsvis ét eller intet Infleksionspunkt. Men svarende til de to Muligheder vil det fremspringende Punkt af G_2, der falder i O, være henholdsvis af 1ste eller af 2den Art, og G_2 vil da have enten ét eller to Infleksionspunkter. G_1 og G_2 have altsaa i hvert Fald tilsammen to Infleksionspunkter.

Ligger O derimod paa Sløjfen af G_1, maa det paa denne Gren nødvendigvis være fremspringende af 3die Art (da Sløjfen er en kontinuert Kurve af 2den Orden), paa G_2 altsaa af 1ste Art; G_1 og G_2 faa altsaa hver ét og kun ét Infleksionspunkt.

Herved have vi forudsat, at ingen gjennem O gaaende Bue dér har et Infleksionspunkt, men paa aldeles lignende Maade som ovenfor ved Beviset for (12) ses det, at Sætningen ogsaa i saa Fald vedbliver at gjælde.

[1]) De tilføjede Betingelser ere i en Tegning saa lette at tilfredsstille, at man regulært maa gjøre flere Forsøg for at sé, at de ikke altid ere nødvendigvis tilfredsstillede af sig selv. Forøvrigt staar Beskrivelsen af Formerne af denne Type i Præcision tilbage for de næsten fuldstændige Beskrivelser af Kurverne af de 3 andre Typer.

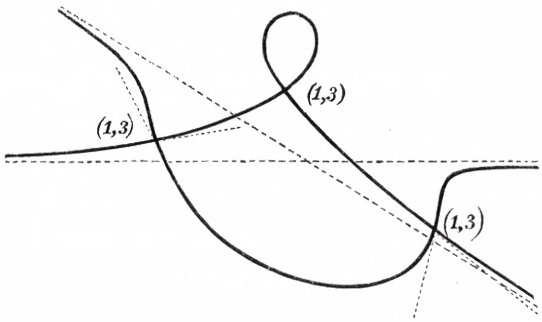

Fig. 24.

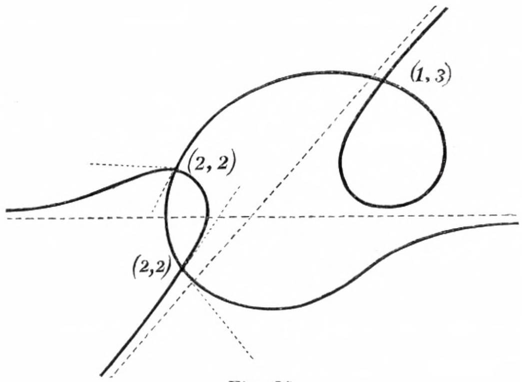

Fig. 25.

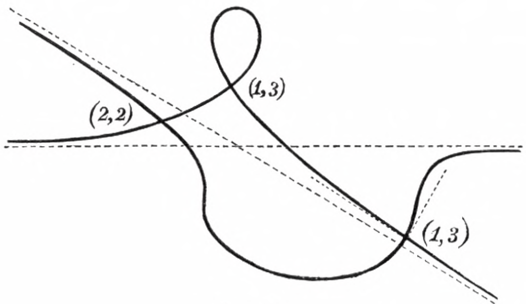

Fig. 26.

For nu at tegne Kurven sammenføjes i én Figur to fra § 4 velkjendte Former til en fuldstændig kontinuert Kurve af fjerde Orden, hvorved tillige den Side 57 nævnte Sidebetingelse bliver at tilfredsstille (enhver Tegning viser, at dette sker saare let). Den ene af Grenene skal have en Sløjfe svarende til et Dobbeltpunkt O. Ud fra dette Punkt deles Kurven i to Grene af lige Orden. Forudsætter man nu, at intet af de øvrige Dobbeltpunkter ligger paa en Sløjfe, findes der kun 3 Muligheder, naar man benytter Arten af det fremspringende Punkt som Inddelingsgrund, thi paa den Gren G_1, der har en Sløjfe, kan intet fremspringende Punkt være af 1ste Art.

1) Ved Overskæring i begge Dobbeltpunkterne O og O_1, dannes en Gren med et fremspringende Punkt af 1ste Art (og af tredie Art). Paa G_1 er det fremspringende Punkt af 3die Art (se Fig. 24).

2) Ved Overskæring i begge Punkterne O og O_1 dannes et fremspringende Punkt af 2den Art (se Fig. 25).

3) Ved Overskæring i det ene af Dobbeltpunkterne faas et fremspringende Punkt af 1ste og 3die Art, ved Overskæring i det andet et Punkt af 2den Art (se Fig. 26).

I hvert af disse Tilfælde er det aabenbart muligt, at Sløjfen svinder ind, saaledes at Kurven faar en Spids.

Der er endnu den Mulighed tilbage, at det Dobbeltpunkt, hvori Overskæringen sker, ligger paa Sløjfen af den ene af de to herved dannede Grene G_1 og G_2. Lad os da antage, at vi ved Overskæring i O faa en Gren G_1, paa hvis Sløjfe σ Punktet O ligger. De to andre Dobbeltpunkter ere dels Dobbeltpunktet O_2 paa G_1 (og σ) dels et enkelt Skæringspunkt O_1 mellem G_1 og G_2. Det sidstnævnte kan ikke ligge paa σ, thi, som man ser det ved sædvanlig Afrunding af de to fremspringende Punkter i O, maa G_2 (foruden O) have et lige Antal Punkter fælles med σ, og G_1 og G_2 have i det hele ikke flere end ét (fra O forskjelligt) Punkt fælles. O_1 ligger altsaa paa den ulige Gren σ' af G_1.

Lad os dernæst overskære Kurven af fjerde Orden i O_2, hvorved den deles i to Grene G_1' og G_2'. Disse maa ogsaa være af ulige Orden, thi en af Grenene maa falde

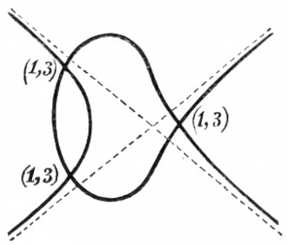

Fig. 27.

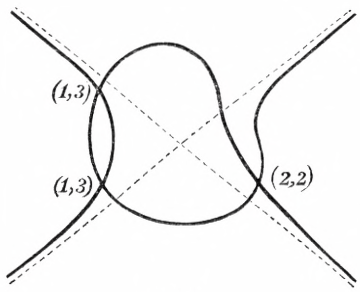

Fig. 28.

sammen med den nysnævnte Kurvedel σ'. Lad denne være G_2'. Den anden Gren G_1' vil da gaa ud fra O_2 langs en Bue af σ til O, dernæst, da G_1 med Undtagelse af det fremspringende Punkt i O er fuldstændig kontinuert, langs en ulige Gren tilbage til O, og endelig langs en anden Bue af σ tilbage til O_1. Deraf følger, at O ligger paa Sløjfen af den ene af de to Grene, hvori Kurven deles ved Overskæring i O_2, og det er tilmed samme Kurvedel σ, der i begge Tilfælde udgjør Sløjfen; O og O_2 spille altsaa samme Rolle for Figuren.

Da nu et fremspringende Punkt paa en Sløjfe, der hører til en Kurve af tredje Orden, kun kan være af 3die Art, maa Grenene af Fjerdegradskurverne baade ved Overskæring i O og i O_1 faa et saadant fremspringende Punkt. Derimod kunne de fremspringende Punkter, der dannes ved Overskæring i O_2, enten begge være af 2den Art eller det ene være af 1ste, det andet af 3die Art.

Dette giver altsaa ikke flere projektivt forskjellige Muligheder end de to, der henholdsvis findes i Fig. 28 og i Fig. 27.

I Dobbeltpunktet O_1 kan den ene af de to derigjennem gaaende Buer eller ogsaa begge have et Vendepunkt. I alle Tilfælde har Kurven imidlertid efter Udviklingerne i Slutningen af den forrige Paragraf to og kun to Infleksionspunkter.

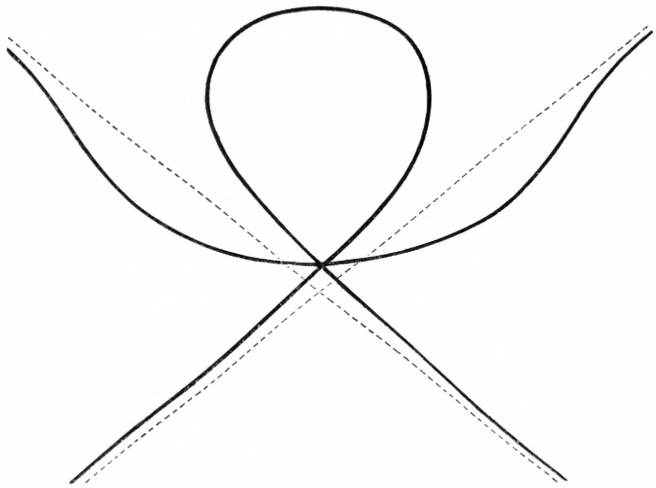

Fig. 29.

Det er muligt, at alle tre Dobbeltpunkter falde sammen, saa at man faar en Kurve af tredie Orden ved et tredobbelt Punkt i O, to Vendetangenter og ingen Dobbelttangent. Dens Form findes i Fig. 29. Det er aabenbart muligt, at Sløjfen kan svinde ind, saaledes at der i O falder en Spids og en enkelt derigjennem gaaende Gren.

I Figurerne af Kurver af den tredie Hovedtype have vi fundet Eksempler paa Kurver med tre Dobbeltpunkter, der ikke ere af samme Art. Man ser f. Ex. af Fig. 25 og Fig. 26, at begge Kombinationerne: 2 af anden og 1 af første Art, og 2 af første og 1 af anden Art, ere mulige. Vi ville nu bevise, at alle saadanne Muligheder ere udtømte ved Figurerne 21—25. Man har nemlig:

(14) En Kurve af fjerde Orden, med tre Dobbeltpunkter, der ikke alle ere af samme Art, maa nødvendigvis kunne sammensættes af to Grene af tredie Orden, hvoraf den ene har en Sløjfe.

Vi ville føre dette Bevis paa den Maade, at vi gaa ud fra, at Kurven ved Overskæring i et vilkaarligt af de tre Dobbeltpunkter A, B og C deles i Grene af lige Orden, og eftervise, at Dobbeltpunkterne i saa Fald ikke kunne være af forskjellig Art.

Lad B være af 1ste Art, medens Arten af A er vilkaarlig. Gjennemse vi nu Beviset Side 48—49 for, at alle Dobbeltpunkterne, undtagen det udhævede Punkt A, hvori Overskæringen sker, paa en G^4 med lutter Dobbeltpunkter af 1ste Art, maa være Skæringspunkter mellem de to Grene, der høre til A, saa vil man lægge Mærke til, at det i Beviset i Virkeligheden kun benyttes, at det betragtede fra A forskjellige Dobbeltpunkt er af første Art.

Deler man derfor den Kurve, vi nu undersøge, ud fra Dobbeltpunktet A i to Grene G_1 og G_2, maa B, der er forudsat at være af første Art, efter det tidligere nødvendigvis være et Skæringspunkt mellem G_1 og G_2. Men derefter kan man se, at det samme ogsaa maa gjælde om det tredie Dobbeltpunkt C, og det hvad enten dette er af første eller af anden Art. I Fald nemlig C var et Dobbeltpunkt paa en af Grenene f. Ex. paa G_1, saa vilde Linien BC skære G_1 og G_2, der jo begge ere af lige Orden, foruden i B og C i mindst endnu ét Punkt, altsaa Kurven $G_1 + G_2$ i mindst 5 Punkter, hvilket er umuligt.

Vi kunne dernæst antage, at Betegnelserne ere valgte saaledes, at C er af anden Art. Der vil da fra C udgaa to Tangenter til Kurven, og lad os antage, at den ene t af disse berører f. Eks. G_1. Denne Linie skærer G_2 i mindst endnu ét Punkt (foruden i C) og derfor $G_1 + G_2$ i flere end 4 Punkter, hvilket er umuligt.

De Kurver, hvis Dobbeltpunkter ikke alle ere af samme Art, høre altsaa til vor tredie Hovedgruppe, og i denne ere alle de typiske Former tidligere bestemte.

Vi have altsaa kun tilbage at undersøge de Former, hvor alle Dobbeltpunkterne ere af anden Art og hvor tillige alle sammensættende Grene ere af lige Orden. Om disse resterende Kurver ville vi sige, at de danne *den fjerde Hovedtype*.

Det vil ved en Række indledende Sætninger, som det vil være nødvendigt først at fremsætte, for en væsentlig Del dreje sig om Sløjfer paa Kurven[1]). Herved minde vi om, at vi ved *en til et Dobbeltpunkt O hørende Sløjfe* (O) forstaa en til O hørende Gren af lige Orden, der ikke indeholder noget fra O forskjelligt Dobbeltpunkt; (O) er altsaa en Kurve af almindeligvis fjerde Orden, der med Undtagelse af et fremspringende Punkt i O er fuldstændig kontinuert.

Naar Kurven har ét og kun ét Dobbeltpunkt, vil der til dette høre to Sløjfer; undtages dette Tilfælde, der maa betragtes særskilt, vil der til hvert Dobbeltpunkt højst svare én Sløjfe; Forekomsten af Spidser, der efter Sætning (8) er indbefattet i den almindeligere Theori, skal betragtes bagefter.

Vi saa tidligere, at Kurverne af den anden Type i Almindelighed ikke havde Sløjfer, men kun, naar Kurven specielt havde ét og kun ét Dobbeltpunkt; dette vil stille sig helt anderledes ved de Former, vi nu skulle behandle.

Fra hvert Dobbeltpunkt af en Kurve af den fjerde Type udgaar én og kun én Tangent til hver Sløjfe, der ikke hører til dette Dobbeltpunkt. (15)

Lad to Dobbeltpunkter være O og O_1, og lad os bestemme Tangenterne fra O til Sløjfen (O_1). Forbindes et vilkaarligt Punkt M af denne med O, vil Forbindelseslinien skære (O_1) i endnu ét og kun ét Punkt. Da Forbindelsen mellem M og M_1 er ubetinget og gjensidig éntydig, vil der altsaa finde to og kun to Sammenfald Sted, saafremt M og M_1 bevæge sig i modsatte Retninger. Lad os for at undersøge dette antage, at M til at begynde med bevæger sig paa (O_1) ud fra O_1 i en bestemt Retning. Saafremt da Linien OM til at begynde med anden Gang skærer (O_1) i Punkter, der ogsaa ligge i Nærheden af O_1, maa Bevægelsesretningerne af M og M_1 paa dette Sted (og altsaa overalt) være modsatte. Men dette finder Sted, thi Linien OO_1 er en uegentlig Tangent til (O_1); ellers

[1]) Man kan følge Beviserne f. Eks. paa en vilkaarlig af Figurerne 32—36.

vilde nemlig samme Linie skære (O_1), der jo er kontinuert som Punktfrembringelse, i et Punkt forskjelligt fra O_1, altsaa hele Kurven af fjerde Orden i 5 Punkter, hvilket er umuligt. Foruden OO_1 gaar altsaa endnu én (egentlig) Tangent fra O til (O_1).

(16) En Kurve af fjerde Orden kan højst have tre Sløjfer.

Dette følger for de her behandlede Kurveformers Vedkommende umiddelbart af den foregaaende Sætning i Forbindelse med den tidligere, at der fra et Dobbeltpunkt højst kan udgaa to Tangenter til Kurven. Sætningen gjælder dernæst ifølge det tidligere almindelig om alle Kurver af fjerde Orden[1]).

(17) En Kurve af den fjerde Hovedtype maa mindst have to Sløjfer.

Denne Sætning er selvfølgelig, naar Kurven kun har ét Dobbeltpunkt. Findes flere, dele vi Kurven i to Grene G_1 og G_2 svarende til et vilkaarligt af Dobbeltpunkterne O. De andre Dobbeltpunkter maa da enten være Skæringspunkter mellem de to Grene eller være Dobbeltpunkter paa disse hver for sig, hvilke Muligheder i og for sig ikke udelukke hinanden. Ved Kurverne af anden Hovedtype saa vi, at alle Dobbeltpunkterne fremkom ved den første af disse Muligheder. Her kunne vi imidlertid vise, at alle Dobbeltpunkter tvertimod maa fremkomme som Dobbeltpunkter paa hver Gren for sig. Lad os nemlig antage, at G_1 og G_2 kunde skære hinanden i et Punkt O_1. Gjennem dette gaar to Tangenter til Kurven, og lad os antage, at den ene t af disse Tangenter berører f. Ex. G_1. Linien t vil da skære baade G_1 og G_2 i det enkelte Punkt O_1 — thi t kan ikke være Tangent i O_1 — og maa derfor, da Grenene begge ere af lige Orden, skære disse i mindst endnu ét Punkt. Men dette er umuligt, da t saa vilde skære $G_1 + G_2$ mindst $4 + 2 = 6$ Punkter.

Lad os nu antage, at G_1 ikke er en Sløjfe. Lader man da et Punkt M gjennemløbe denne Gren i en bestemt Retning, vil M, inden det atter vender tilbage til O, nødvendigvis være kommen til et Punkt O_1, hvor det har været før (men paa en anden Bue gjennem O_1), thi ellers var G_1 en Sløjfe. Den Kurvegren, som M gjennemløber fra O_1 tilbage til O_1 i den valgte Retning, vil altsaa sikkert indeholde mindst ét Dobbeltpunkt færre end G_1, og ved Fortsættelse af Operationen maa man altsaa i hvert Fald naa en Sløjfe. Det samme gjælder om Grenen G_2.

(18) To Sløjfer, der høre til forskjellige Dobbeltpunkter, ville altid have én og kun én egentlig fælles Tangent.

Lad Sløjferne være (O_1) og (O_2). Fra O_1 udgaar efter (15) én egentlig Tangent til (O_2). Dette vil imidlertid ogsaa gjælde for ethvert Punkt af (O_1). Lade vi nemlig et Punkt

[1]) Hr. Dr. Heegaard, hvem jeg meddelte denne Sætning, gjorde mig opmærksom paa, at dette uafhængigt af en sammenhængende Theori paa simpel Maade kan indses ved Gebetsinddelinger af lignende Art som de, jeg her har benyttet til det første Bevis for Sætning (1).

M gjennemløbe hele Sløjfen (O_1), vil en Ændring i Antallet af egentlige Tangenter til (O_2) udgaaende fra M kun kunne ske enten derved, at en Vendetangent til (O_2) skærer (O_1), eller derved, at en Dobbeltpunktstangent i O_2 skærer (O_1). Begge disse Muligheder ere imidlertid udelukkede, da (O_1) er af lige Orden, saa at de nævnte Linier vilde skære hele Kurven i flere end 4 Punkter.

Den egentlige Tangent, der fra det bevægelige Punkt M udgaar til (O_2), skærer endnu (O_1) i et enkelt Punkt M_1, og Forbindelsen mellem M og M_1 er gjensidig éntydig. At dernæst M og M_1 løbe i modsatte Retninger, ses ved at betragte Forholdene i Nærheden af O_1, idet man lægger Mærke til, at den egentlige Tangent til (O_2), der udgaar fra O_1, maa være en uegentlig Tangent til (O_1), hvilket vises aldeles som ovenfor (om Linien $O_1 O$ i Beviset for (15)). Der maa derfor finde ét Sammenfald Sted mellem M og M_1 udenfor O_1.

Eftersom der fra et Dobbeltpunkt O udgaar 0, 1 eller 2 Tangenter til den ene G_1 af de to Grene, der støde sammen i O, ville Tangenterne t_1 og t_2 i O skære samme Gren i 0, 1 eller 2 Punkter. (19)

Lad os først antage, at ingen af Tangenterne t_1 og t_2 skære G_1, men at begge disse skære den anden Gren G_2. To smaa Buer af G_1, der begynde i O, og dér berøre enten t_1 eller t_2, ville vi kalde henholdsvis σ_1 og σ_2. Naar da et Punkt M i en bestemt Retning gjennemløber G_1 fra O tilbage til O, vil til at begynde med Linien OM foruden i O kun skære G_1 i det ene enkelte Punkt M, thi OM er da Nabolinie til t_1, der skærer G_2 i ét (og kun ét) Punkt. Dette Forhold kan imidlertid ikke forandres ved M's yderligere Bevægelse, da et Skæringspunkt mellem OM og Kurven kun kan rykke fra G_2 ind paa G_1, ved at OM overskrider enten t_1 eller t_2 og dette efter Forudsætningen er udelukket. Ingen Linie gjennem O skærer altsaa G_1 i flere end ét Punkt, og der kan derfor ingen Tangenter findes.

Hvis t_1, men ikke t_2, skærer G_1, lade vi M gjennemløbe Grenen G_1, ud fra O saaledes, at først σ_2 gjennemløbes. Indtil M naar Skæringspunktet N_1 mellem t_1 og G_1, vil Linien OM kun skære G_1 i det ene Punkt M; overskrides derpaa N_1, vil OM nu skære G_1 i to Punkter M og M', thi der maa ved denne Overgang enten være vundet eller tabt et Skæringspunkt mellem OM og G_1, og ét Skæringspunkt, nemlig M, er der jo givet at være. Punktet M' vil, idet N_1 overskrides af M, bevæge sig paa Buen σ_1, ud fra O, og altsaa i modsat Retning af M. M og M' maa derfor nødvendigvis falde sammen i Røringspunktet T for en fra O udgaaende Tangent. Derefter bevæger M sig videre fra T mod O og kan nu i hvert Fald ikke paany træffe M', inden O er overskredet, men Operationen standses, naar M første Gang er naaet tilbage til O. Der findes altsaa i dette Tilfælde kun én fra O udgaaende Tangent.

Hvis endelig baade t_1 og t_2 skære G_1, vil ingen af disse Tangenter skære G_2, og det foregaaende viser da, at ingen af de to fra O til Kurven $G_1 + G_2$ udgaaende Tangenter berøre G_2; de maa derfor begge berøre G_1.

Den omvendte Sætning er en direkte Følge af den her beviste.

Sætningen gjælder, om man vil, ogsaa naar O er Infleksionspunkt paa den ene eller paa begge derigjennem gaaende Buer, idet en Vendetangent i O baade regnes som en gjennem O gaaende Tangent, der berører udenfor O, og som en Linie, der skærer i et Punkt udenfor O, nemlig i et Nabopunkt til O.

(20) De to Grene G_1 og G_2, hvori en Kurve af den fjerde Hovedtype deles ved Overskæring i et Dobbeltpunkt O, have altid to og kun to fælles Tangenter.

Vi ville først antage, at ingen af de to Tangenter t_1 og t_2 i O skære G_1, ligesom ogsaa, at ingen af disse ere Vendetangenter; ifølge den sidste Sætning ville da de to fra O udgaaende Tangenter til hele Kurven begge berøre G_2.

Vi ville nu betragte et ved O nærliggende Punkt M_1 af G_1, om hvilket vi antage, at det ligger paa den Bue σ_1 af G_1, der i O berører t_1 (den anden ved O nærliggende Bue af G_1, der i O berører t_2, kalde vi σ_2). Det kommer da først an paa at indse, at der gjennem M_1, ligesom gjennem O, gaar to og kun to Tangenter til G_2. Den eneste Mulighed for en Ændring i Antallet er den, at det bevægelige Punkt M ved langs σ_1 at gaa fra O til M_1, kunde være kommen over paa den positive Side af σ_2, saa at der til hele Kurven tilkom to Tangenter, af hvilke den enes Røringspunkt ligger paa G_1, og den andens paa G_2 (nemlig paa hver sin Side af O). Nu maa imidlertid Antallet af alle de Linier, der gaa gjennem et eller andet Punkt og skære en lukket kontinuert Kurve i sammenfaldende Punkter (forstaaet paa sædvanlig Maade, hvorefter en vilkaarlig Linie gjennem et Dobbeltpunkt dér ikke skærer i sammenfaldende Punkter) nødvendigvis være lige. Hvis der altsaa ved Overgangen fra O til M_1 skulde optræde en ny Tangent til G_2, maatte der endnu findes en fjerde Linie gjennem M_1, der skar G_2 i sammenfaldende Punkter, og dette var kun muligt derved, at Linien M_1O blev en uegentlig Tangent i O til G_2 (og derved ogsaa til G_1). Men Linien OM_1 er en Nabolinie til t_1, og vil derfor skære G_2 i ét og kun ét Punkt i endelig Afstand fra O; denne Linie vilde altsaa skære G_2 i tre Punkter, hvoraf de to faldt sammen i O, hvilket er umuligt. Men ligesom der fra et Nabopunkt til O paa G_1 udgaar to og kun to Tangenter til G_2, vil det samme være Tilfældet med et aldeles vilkaarligt Punkt af G_1. Bevæger nemlig et Punkt M sig paa G_1 over M_1 fra O tilbage til O, kan ingen Ændring ske i Tangenternes Antal, thi ingen Vendetangent eller Dobbelttangent til G_2 kan skære G_1, og lige saa lidt have G_1 og G_2 noget Punkt fælles. Endvidere kan intet Røringspunkt for en fra M udgaaende Tangent gaa fra G_2 over paa G_1, thi dette maatte ske ved, at Røringspunktet overskred O, hvilket er umuligt, da hverken t_1 eller t_2 skære G_1.

Vi skulle nu se, med hvilken Modifikation det samme vil gjælde, naar den ene t_1 af Tangenterne i O skærer G_1. Af de to Tangenter, der udgaa fra O, vil i dette Tilfælde den ene berøre G_1, den anden G_2. Lad os vælge et Nabopunkt M_1 til O paa Buen σ_2. Vi se da som før, at Linien $M_1 O$ ikke kan være uegentlig Tangent i O. Men i saa Fald maa der nødvendigvis optræde en ny gjennem M_1 gaaende Tangent til G_2, da Antallet af Linier gjennem M_1, der skære i sammenfaldende Punkter, maa være lige. Gjennemløber nu et Punkt M hele Grenen G_1 ud fra O og først langs σ_2, vil der gjennem hver Stilling af M udgaa to og kun to Tangenter til G_2, lige indtil M falder i Skæringspunktet N_1 mellem G_1 og t_1, hvorved et Røringspunkt rykker fra G_2 ind paa G_1. Men efter at M har overskredet N_1 vil paa den anden Side Linien MO nu være uegentlig Tangent i O, thi MO var ikke uegentlig Tangent i Stillingen lige inden den naaede $N_1 O$. Vi se altsaa, at der ogsaa i dette Tilfælde fra hvert Punkt M af G_1 udgaar to Tangenter til G_2, saafremt vi medregne MO, hver Gang den er uegentlig Tangent i O.

Beviset føres paa en aldeles lignende Maade, naar begge Tangenter t_1 og t_2 skære G_1, men dette Tilfælde kan desuden — i hvert Fald for den her omhandlede Sætnings Vedkommende — føres tilbage til det første ved Ombytning af Grenenes Benævnelser.

Vi vælge nu paa G_1 et vilkaarligt Punkt M og drage derigjennem de to Tangenter til G_2. Skære disse G_1 i de to Punkter N_1 og N_2, har man paa G_1 en Korrespondens af Punkter M og N, hvor der undtagelsesløst til hvert Punkt M svarer to Punkter N, og omvendt; to Punkter N (eller M), der svare til samme Punkt M (eller N), kunne ikke falde sammen, da ingen Vendetangent eller Dobbelttangent til G_2 kan skære G_1, og G_1 og G_2 intet Punkt have fælles. Heraf følger, at naar et Punkt M gjennemløber G_1 i en bestemt Retning, saa maa de to Punkter N ogsaa gjennemløbe G_1 i en bestemt Retning, der er den samme for begge Punkterne. Men denne Retning er tillige den omvendte af Bevægelsesretningen for M. Man kjender nemlig i Forvejen de to Sammenfald mellem M og N, der svare til de to fra O udgaaende Tangenter til Kurven; at en saadan Tangent m maa opfattes som fælles Tangent for G_1 og G_2 i udvidet Forstand, følger deraf, at m nødvendigvis maa være uegentlig Tangent i O, da m ellers vilde skære Kurven i flere end 4 Punkter. I Nærheden af et saadant Sammenfald ser man nu straks, at M og N bevæge sig i modsatte Retninger; dette maa derfor være Tilfældet overalt, og der maa derfor finde 4 Sammenfald Sted mellem M og N. Der findes altsaa altid to egentlige fælles Tangenter til G_1 og G_2, foruden de to uegentlige, der ere repræsenterede ved Tangenterne fra O til Kurven $G_1 + G_2$.

Sætningen vedbliver at gjælde, ogsaa naar O er et Infleksionspunkt (én eller to Gange). Hvis f. Ex. t_1 er Vendetangent, kunne vi antage, at G_2 er den Gren, som berøres af den fra t_1 forskjellige, fra O udgaaende Tangent m til Kurven. Fra et Nabopunkt M_1 til O paa σ_1 vil der da udgaa to Tangenter til G_2, nemlig dels en Nabotangent til m, dels en Nabotangent til t_1, thi den sidstes Røringspunkt falder efter Infleksionspunktets Definition paa G_2. Derefter føres Beviset som ovenfor.

(21) Eftersom der fra det fremspringende Punkt O paa en Sløjfe G_1 udgaar 0, 1 eller 2 Tangenter til denne, vil der paa Sløjfen findes 0, 1 eller 2 isolerede Infleksionspunkter.

Vi bemærkede ovenfor, at en Tangent m fra O til Sløjfen G_1 maatte være en uegentlig Tangent i O. Naar vi nu afrunde det fremspringende Punkt O, vil af den Grund en Nabolinie m' til m blive en Dobbelttangent til den ændrede Sløjfe G_1'. Da denne er fuldstændig kontinuert, ville alle dens Infleksionspunkter ordne sig i Infleksionspar; ophæve vi derpaa Ændringen, vil dette kun paavirke det Par, der findes paa den til m' svarende indre Bue, af hvilket ét Infleksionspunkt vil forsvinde i O. Der bliver altsaa lige saa mange Infleksionspunkter tilbage, der ikke høre til Infleksionspar, som der findes Tangenter til G_1 udgaaende fra O. I Beviset have vi ikke taget Hensyn til, at Tangenterne t_1 og t_2 i O kunde være Vendetangenter, men Sætningen vedbliver at være gyldig. Ere de f. Ex. begge Vendetangenter, udgaar der ingen yderligere Tangenter fra O, og kun de i O faldende Infleksionspunkter ere isolerede.

Vi ere nu tilstrækkelig udrustede til at kunne karakterisere alle de Former, der høre til den fjerde Hovedtype. Disse maa efter det ovenstaaende deles i to Samlinger, eftersom Kurven har to eller tre Sløjfer.

Vi ville først tage Hensyn til den sidstnævnte Mulighed og bevise:

(22) En Kurve af fjerde Orden med tre Sløjfer vil ikke have andre Singulariteter end dels de tre fælles Tangenter til to og to af Sløjferne, dels Infleksionspar, der udelukkende ville befinde sig paa Sløjferne (se Fig. 30).

Kurven kan for det første ikke have flere end de 3 til Sløjferne hørende Dobbeltpunkter, da der gjennem hvert nyt Dobbeltpunkt vilde udgaa mindst 3 Tangenter til Kurven, nemlig én til hver Sløjfe, hvilket er umuligt.

Kurven sammensættes dels af 3 Sløjfer: (O_1), (O_2), (O_3) svarende til Dobbeltpunkterne O_1, O_2, O_3, dels af en Restkurve R^4 af fjerde Orden, der har fremspringende Punkter i O_1, O_2, O_3 men ellers er fuldstændig kontinuert. Da enhver af Sløjferne f. Ex. (O_1) har en Tangent fælles med enhver af de andre Sløjfer, ifølge (18), vil der ikke findes nogen fælles Tangent for en af Sløjferne og Restkurven (ifølge (20)). Da der endvidere fra et af Dobbeltpunkterne f. Ex. O_1 udgaar én Tangent til (O_2) og en til (O_3), kan der fra O_1 ikke udgaa nogen Tangent til (O_1). Ingen Sløjfe kan derfor ifølge (21) have noget isoleret Infleksionspunkt.

Det staar nu tilbage at vise, at Restkurven er sammensat af tre elementære Buer $(O_1 O_2)$, $(O_2 O_3)$, $(O_3 O_1)$, hvilket efter § 2 Sætning (7) er godtgjort, naar vi vise, at den hverken har Dobbelttangenter eller Infleksionspunkter. Vi ville først eftervise, at hvert af

Dobbeltpunkterne f. Ex. O_1 maa være et fremspringende Punkt af tredie Art paa sin Sløjfe. Da der nemlig ingen Tangent udgaar fra O_1 til (O_1), kan ingen af Tangengenterne i O_1 skære (O_1) ifølge (19), og hver af disse Tangenter maa derfor skære Restkurven i et fra O_1 forskjelligt Punkt N; her er det jo sikkert, at Dobbeltpunktet paa ingen af de derigjennem gaaende Buer kan være et Infleksionspunkt. Enhver Nabotangent til t paa Restkurven vil altsaa skære denne i ét og kun ét Punkt, der er i endelig Afstand fra O_1, og maa derfor endnu skære den i et Punkt, der da maa være et Nabopunkt til O_1.

En Tangent til R^4, der berører i et Punkt M_1 paa Buen $(O_1 O_2)$ nær ved O_1, maa altsaa skære Buen $(O_1 O_3)$ i et Punkt P_2 ligeledes nær ved O_1. Naar nu et Punkt M gjennemløber hele Buen $(O_1 O_2)$, vil det fra P_2 forskjellige enkelte Skæringspunkt P_1

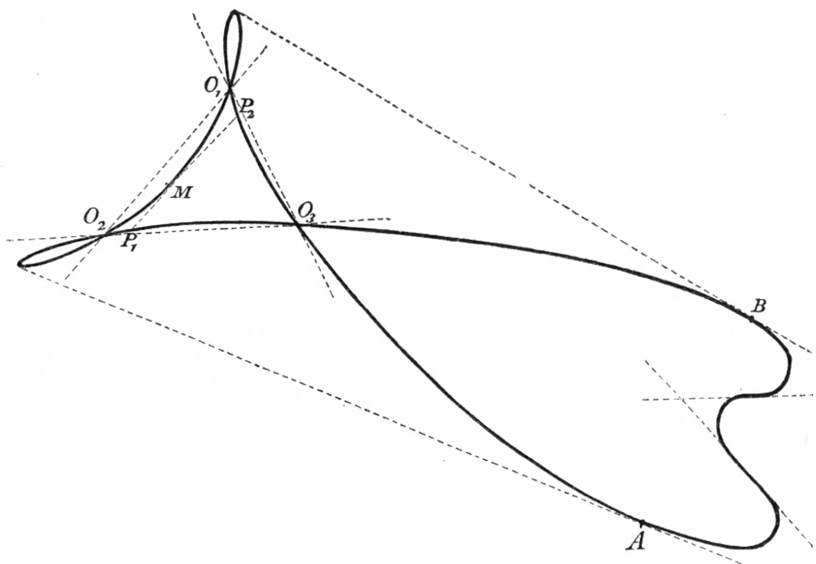

Fig. 30.

mellem Tangenten m og R^4 stadig befinde sig paa Buen $(O_2 O_3)$. Ved M's Bevægelse maa nemlig ethvert af Punkterne P_1 og P_2 holde sig paa en bestemt af de tre Buer, hvoraf R^4 er sammensat, thi disse støde kun sammen i Dobbeltpunkterne, og gjennem et saadant Punkt gaar ingen Tangent til R^4, der berører udenfor Dobbeltpunktet. Men falder M i et Nabopunkt til O_2 paa $(O_1 O_2)$ vil et enkelt Skæringspunkt med Kurven findes paa Buen $(O_2 O_3)$, da O_3 er fremspringende af 1ste Art paa R^4, og dette Skæringspunkt maa være det, der benævnedes P_1. Der kan derfor ingen Dobbelttangent t findes til Restkurven, thi en nærliggende Tangent til t vilde da skære i to enkelte Punkter af samme Bue — og ligesaa lidt nogen Vendetangent, da en nærliggende Tangent saa vilde skære den Bue af R^4, paa hvilket Røringspunktet ligger, i et enkelt Punkt udenfor Røringspunktet.

For nu nærmere at beskrive Kurven kunne vi, da der findes Dobbelttangenter, uden Specialisering i projektiv Forstand gaa ud fra, at Kurven ligger helt i det endelige, hvilket fastholdes i det følgende. Forbindelseslinien mellem to af Dobbeltpunkterne kan da ikke yderligere skære Kurven. Deraf følger, at hver Sløjfe ligger helt paa den ene Side af hver Forbindelseslinie mellem to Dobbeltpunkter; saaledes maa (O_1) og (O_2) ligge helt paa den ene Side af Linien $O_1 O_2$ og netop paa den Side, der ikke indeholder det tredie Dobbeltpunkt O_3, thi gjennem dette Punkt skal Restkurven gaa. Restkurven ligger altsaa helt indeni «Dobbeltpunktstrekanten» $O_1 O_2 O_3$, og Sløjferne ligge i hver sin af de tre andre Trekanter, der dannes af Dobbeltpunktstrekantens Sider i Forbindelse med den uendelig fjerne rette Linie.

Der kan nu ikke være nogensomhelst Tvivl om, hvorledes Kurven skal tegnes (se Fig. 30). Man begynder ved en vilkaarlig Dobbeltpunktstrekant $O_1 O_2 O_3$, og forbinder dens Vinkelspidser to og to med elementære Buer, der løbe helt indeni Trekanten og blot ere underkastede den Begrænsning ikke at skære hinanden. Derefter tegnes Sløjferne, beliggende i de ovennævnte Trekanter. Berøres en Sløjfe i A og B af to Dobbelttangenter, kunne endelig Infleksionspar tilføjes paa den Bue af Sløjfen, der ligger mellem A og B, men ikke indeholder Dobbeltpunktet. De skulle tegnes saaledes, at ingen af de tilkommende Vendetangenter skære andre Dele af Kurven end den Sløjfe, hvorpaa Røringspunktet ligger.

For den her beskrevne Kurve gjælder den tidligere nævnte Relation mellem Singulariteterne; er nemlig Infleksionsparrenes Antal r, bliver Antallet af Dobbelttangenter $r + 3$, af Vendetangenter $2r$, medens Dobbeltpunkternes Antal er 3.

Hver af Sløjferne kan svinde ind og give Anledning til en Spids. Ad den Vej faar man ifølge (8) alle Former med Spids, der kunne høre til denne Type. Spidserne maa her være af 1ste Art, da vi have bevist, at Dobbeltpunkterne paa Restkurven ere fremspringende af 1ste Art.

Det er muligt, at 1, 2 eller 3 af Sløjferne svinde ind til Spidser. Relationen (10) kan siges at være gjældende ogsaa i disse Tilfælde, naar man regner en Tangent gjennem en Spids, og Forbindelseslinien mellem to Spidser med blandt Dobbelttangenterne, og tillige regner hver Spids som et Dobbeltpunkt.

Vi have her fundet den endelige Sætning om Kurver af fjerde Orden med det højeste Antal Spidser:

(23) Naar en Kurve af fjerde Orden skal have 3 Spidser, maa disse alle være af 1ste Art, og Kurven kan foruden disse ikke have nogensomhelst andre Singulariteter.

De tre Dobbeltpunkter kunne endvidere aabenbart falde sammen, hvilket giver Formen i Fig. 31. Formerne 29 og 31 med de Underformer, hvor en Sløjfe svinder ind til en Spids, ere de eneste mulige Former for Kurver af fjerde Orden med et tredobbelt Punkt.

Vi skulle nu gaa over til Kurverne af den næste Samling, hvilke have to Sløjfer. Vi ville her først antage, at Kurven har ét og kun et Dobbeltpunkt O. Fra dette udgaa to Tangenter til Kurven; der bliver derfor to Former, eftersom disse berøre samme eller forskjellige Sløjfer. Efter foregaaende Sætninger (19 og 20) har man umiddelbart i begge Tilfælde: en Kurve af fjerde Orden med ét Dobbeltpunkt af 2den Art har foruden Infleksionspar med tilhørende Dobbelttangenter to isolerede Vendetangenter og to Dobbelttangenter af anden Art. (24)

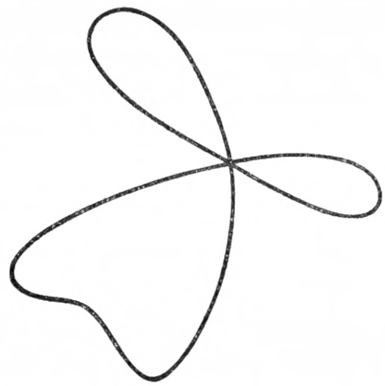

Fig. 31.

Kurven kan uden Specialisation antages at ligge helt i det endelige, hvad vi ville fastholde.

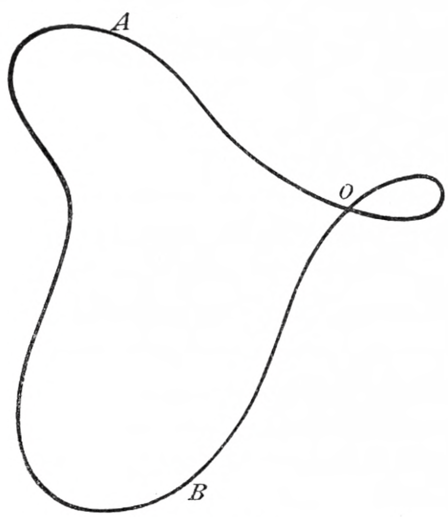

Fig. 32.

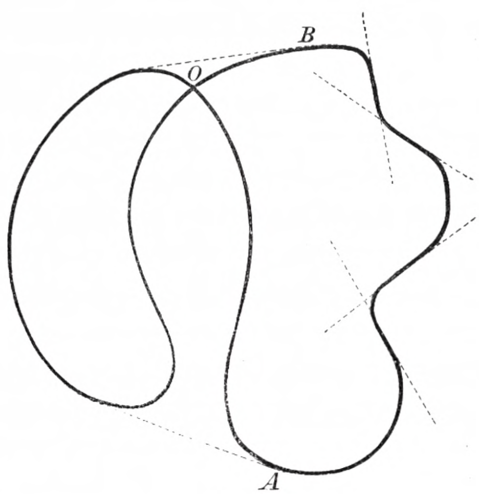

Fig. 33.

Naar nu begge Tangenterne udgaaende fra O berøre samme Sløjfe σ, vil denne indeholde begge Infleksionspunkterne, og Dobbeltpunktet vil paa samme Sløjfe være af første Art. Det sidste — det eneste, der kræver nyt Bevis — ses deraf, at da en vilkaarlig t af Dobbeltpunktets Tangenter skærer σ i ét og kun ét Punkt N udenfor O, vil en Nabotangent m til t skære σ i Nabopunktet til N og ikke i andre Punkter i endelig

Afstand fra O; det fjerde Skæringspunkt mellem m og σ maa derfor være et Nabopunkt til O.

Formen, der er utvivlsom, findes Fig 32.

Naar derimod de fra O udgaaende Tangenter berøre hver sin Sløjfe, vil hver af disse indeholde ét isoleret Infleksionspunkt, og Dobbeltpunktet er paa hver Sløjfe fremspringende af anden Art; Beviset for den sidste Paastand føres analogt med det ovenstaaende. Formen findes Fig. 33.

Infleksionspar kunne tilføjes aldeles efter samme Regel som ved Kurven med 3 Sløjfer. Findes r Infleksionspar, er Antallet af Dobbelttangenter $r+2$, af Infleksionspunkter $2r+2$, og der er ét Dobbeltpunkt. Relationen mellem Singulariteterne er derfor gyldig.

Svinder én af Sløjferne ind, faas en Kurve med Spids. Denne kan enten være af 1ste eller af 2den Art. I det første Tilfælde findes ét isoleret Infleksionspunkt, i det andet to saadanne. Som man kunde vente, skal man altsaa i den ovennævnte Relation regne en Spids af 2den Art baade som Dobbeltpunkt og som Infleksionspunkt, noget, der ogsaa gjælder de følgende Former. At man paa denne Maade faar alle Former med Spids, følger af (8).

De Kurver af denne Art, hvor der i O falder 1 eller 2 Infleksionspunkter, ere lette Overgangsformer mellem de tegnede.

Vi have tilbage at betragte de Kurver med to Sløjfer, hvor Dobbeltpunkternes Antal er større end 1. Lad Dobbeltpunkterne tagne i den Orden, hvori de følge paa hinanden, idet man gaar langs en Kurvebue kontinuert fra den ene Sløjfes Dobbeltpunkt O_1 til den andens Dobbeltpunkt O_n, være O_1, O_2, ... O_n, hvor $n \geqq 2$. Sløjferne ville vi — med en lille Ændring af de tidligere brugte Betegnelser — betegne ved (O_1) og (O_{n+1}).

Lad os nu af Kurven bortskære Sløjfen (O_1). Tilbage bliver da en ny Kurve af fjerde Orden og af samme Art, og denne maa efter Beviset for (17) lige saa vel som den oprindelige have to Sløjfer. Den ene af disse er (O_{n+1}). Den anden, der har O_2 til Dobbeltpunkt, vil desuden have et fremspringende Punkt i O_1, og den skal kaldes den til O_2 hørende uegentlige Sløjfe, og benævnes (O_2). Bortskæres denne af den forrige Restkurve, faar man, naar $n \geqq 3$, en ny uegentlig Sløjfe (O_3) o. s. v. Hele den givne Kurve sammensættes altsaa af 2 egentlige og $n-1$ uegentlige Sløjfer.

Vi have nu de følgende Sætninger.

(25) Forbindelseslinien mellem to vilkaarlige Dobbeltpunkter er en uegentlig Tangent til disses tilhørende Sløjfer.

Forbindelseslinien $O_r O_s$ er f. Ex. uegentlig Tangent til (O_r). Hvis dette nemlig ikke var Tilfældet, vilde Linien skære (O_r) i et enkelt Punkt i O_r, og maatte altsaa, da (O_r) er kontinuert af lige Orden, skære den i mindst endnu ét Punkt; men Linien vilde da skære den givne Kurve i flere end 4 Punkter. Tillige mindes om, at Dobbeltpunkterne kunne tages i omvendt Orden.

Et fremspringende Punkt paa en af de uegentlige Sløjfer er altid af anden Art undtagen i et Punkt, der ogsaa ligger paa en egentlig Sløjfe, i hvilket Tilfælde det kan være fremspringende af første eller anden Art. (26)

Lad først O_1 være et Dobbeltpunkt paa en egentlig Sløjfe. Fra O_1 udgaar én Tangent til den anden egentlige Sløjfe (O_{n+1}), og altsaa højst én til Sløjfen (O_1). Eftersom der nu udgaar én eller ingen, vil Punkt O_1 paa (O_1) være fremspringende af 2den eller 3die Art. Beviset herfor føres aldeles som ved Formerne med 1 Dobbeltpunkt Side 70. Paa Nabosløjfen til (O_1) maa O_1 derfor være af 2den eller af 1ste Art; det Tilfælde, hvor O_1 er Infleksionspunkt paa en af de to derigjennem gaaende Buer, er et let Overgangstilfælde.

Lad nu (O_r) være en uegentlig Sløjfe, hvor Index r er et af Tallene 2, 3 ... $n+1$. Vi kunne da bortskære alle Sløjferne $(O_1)(O_2) \ldots (O_{r-1})$, hvorefter der bliver en Restkurve tilbage, hvor (O_r) vil blive til en egentlig Sløjfe (O_r'), naar vi afrunde det fremspringende Punkt, der findes i O_{r-1}. Fra O_r udgaar én Tangent til (O_{n+1}); der maa altsaa udgaa endnu én til Restkurven. Men da Linien $O_r O_{r-1}$ er uegentlig Tangent i O_{r-1} til (O_r) og vi afrunde i O_{r-1}, maa det være en gjennem O_r gaaende Nabolinie til $O_r O_{r-1}$, der er denne anden Tangent. Til Sløjfen (O_r') udgaar altsaa én Tangent fra O_r, og dette maa derfor være et fremspringende Punkt af 2den Art (sé som før Side 70). I Nærheden af O_r er imdlertid (O_r') sammenfaldende med (O_r), og Sætningen er bevist.

En Kurve af fjerde Orden med to Sløjfer vil altid have to og kun to isolerede Infleksionspunkter, hvilke enten maa ligge paa de egentlige Sløjfer eller paa de tilstødende uegentlige; ingen Sløjfe (egentlig eller uegentlig) kan have flere end ét isoleret Infleksionspunkt, saafremt $n > 2$. (27)

Den egentlige Sløjfe (O_1) sammen med Nabosløjfen (O_2) danner nemlig en Kurve med ét Dobbeltpunkt, der, naar vi afrunde det fremspringende Punkt O_2, ifølge det tidligere vil have to isolerede Infleksionspunkter. Ophæve vi derefter Afrundingen, gaar ét Infleksionspunkt tabt, da Punktet O_2 er fremspringende af 2den Art. Enten paa (O_1) eller paa (O_2) findes altsaa et enkelt isoleret Infleksionspunkt. Tage vi derefter (O_3) sammen med (O_4), og afrunde de fremspringende Punkter i O_2 og i O_4, faar man en Kurve som før med to isolerede Infleksionspunkter. Ophæve vi imidlertid Afrundingen, gaar der atter to tabt, saa at der hverken paa (O_3) eller paa (O_4) vil findes noget isoleret Infleksionspunkt, idet $n > 5$. Et nyt isoleret Infleksionspunkt kan overhovedet først komme enten paa (O_n) eller paa den egentlige Sløjfe (O_{n+1}).

Foruden disse Infleksionspunkter kan Kurven naturligvis have Infleksionspar.

En Kurve af fjerde Orden med to Sløjfer og flere end et Dobbelt- (28)

punkt vil ikke have andre Dobbelttangenter af 2den Art end dels Fællestangenten for de to egentlige Sløjfer, dels de fælles Tangenter for to paa hinanden følgende Sløjfer (baade egentlige og uegentlige).

Foruden de i denne Sætning nævnte kan Kurven naturligvis have Dobbelttangenter, der ere af 1ste Art. En Dobbelttangent af 1ste Art maa nødvendigvis berøre en enkelt af Sløjferne to Gange. Omvendt maa enhver saadan Tangent være en Dobbelttangent af 1ste Art. Dette ses ved først at afrunde de fremspringende Punkter i Sløjfen, hvorved faas en fuldstændig kontinuert Kurve uden Dobbeltpunkter, og derefter igjen ophæve Afrundingen. Betragtes f. Ex. en uegentlig Sløjfe, gaar ved den sidste Operation én Dobbelttangent over til Forbindelseslinien mellem to paa hinanden følgende Dobbeltpunkter ifølge (25), og samtidig forsvinde Infleksionerne i to Nabopunkter til disse (der ere fremspringende af 2den Art paa Sløjfen). Alle de øvrige Dobbelttangenter vedblive at være af 1ste Art efter Afrundingens Ophæven, thi herved ændres Kurven kun i umiddelbar Nærhed af de fremspringende Punkter. Ved en egentlig Sløjfe har man paa lignende Maade at tage Hensyn til den eventuelle fra Dobbeltpunktet udgaaende Tangent til Sløjfen.

De eneste Dobbelttangenter af 2den Art, der kunne fremkomme, ere altsaa fælles Tangenter for to af Sløjferne (baade egentlige og uegentlige).

Ifølge Sætning (20) kan den egentlige Sløjfe (O_1) ikke berøres af flere end to Dobbelttangenter af anden Art, af hvilke den ene er den fælles Tangent med den anden egentlige Sløjfe (O_{n+1}). Vi skulle bevise, at den anden Dobbelttangent anden Gang maa berøre i et Punkt af den uegentlige Sløjfe (O_2). (O_1) og (O_2) tagne tilsammen danne imidlertid en Kurve af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt, der blot i O_2 har et fremspringende Punkt, og Beviset for (20) godtgjør, at der maa findes to og kun to fælles Tangenter til (O_1) og (O_2), idet uegentlige Tangenter medregnes. En saadan uegentlig Tangent har man nu i Tangenten t fra O_2 til (O_1). Hvis dette nemlig ikke var Tilfældet, vilde t i O_2 skære (O_2) i et enkelt Punkt, og maatte derfor skære (O_2) i mindst endnu ét Punkt, altsaa den givne Kurve G^4 i mindst 5 Punkter, hvilket er umuligt. Der bliver altsaa én og kun én egentlig Fællestangent for (O_1) og (O_2), og denne er den eneste Dobbelttangent til Kurven, for hvilken (O_1) kan spille Rolle. Bortskæres nu (O_1) af G^4, bliver en Restkurve G_1' af samme Art tilbage, der blot i O_1 har et fremspringende Punkt. Her danne (O_2) og (O_3) en ny Kurve af fjerde Orden med ét Dobbeltpunkt, der har to Dobbelttangenter, uegentlige Tangenter medregnede. Men en saadan har man ifølge (25) i Linien $O_1 O_2$, og der bliver derfor kun én egentlig Dobbelttangent tilbage, der berører (O_2) og (O_3), og denne sammen med den forrige ere tilmed de eneste, hvis Røringspunkter kunne ligge paa (O_2). Anvendes nemlig Sætning (20) paa Restkurven G_1', ser man, at der vil findes to og kun to fælles Tangenter (uegentlige medregnede) for (O_2) og den Gren, der dannes ved af G_1' at udelade (O_2); den ene af disse er imidlertid Tangenten fra O_1 til

(O_{n+1}), der som ovenfor ses at være uegentlig Tangent i O_1 til (O_2). Da denne Slutningsmaade kan fortsættes, til man naar (O_{n+1}), er herved Sætningen bevist.

For disse Kurver gjælder ogsaa Relationen mellem Singulariteterne.

Findes nemlig n Dobbeltpunkter og r Infleksionspar, bliver Antallet af Dobbelttangenter $r + n + 1$ og af Infleksionspunkter $2r + 2$. Betydningen af Spidser er nævnt tidligere.

Det staar endnu tilbage at give en saadan Beskrivelse af Kurven af fjerde Orden med to Sløjfer og flere end ét Dobbeltpunkt, at deres Konstruktion bliver utvivlsom.

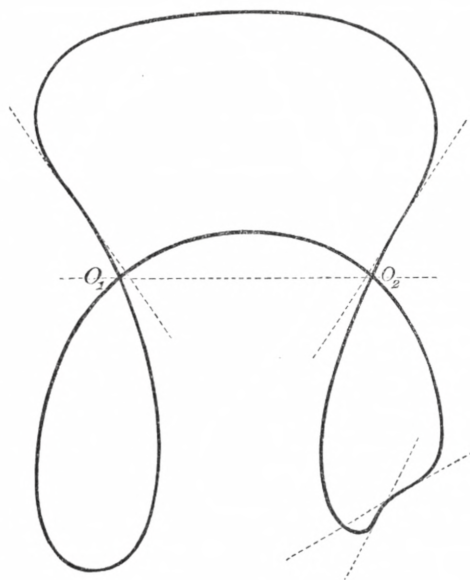

Fig. 34.

Da Kurven i hvert Fald har Dobbelttangenter, kunne vi i det følgende uden Specialisering i projektiv Forstand gaa ud fra, at Kurven ligger helt i det endelige.

Kurven med to Dobbeltpunkter maa betragtes for sig. Kurven er her sammensat dels af to Sløjfer med fremspringende Punkter i Dobbeltpunkterne O_1 og O_2, dels af to Buer, der forbinde O_1 med O_2. Vi kunne nu sé, at Sløjferne maa ligge paa den samme Side af Linien $O_1 O_2$. Hvis dette nemlig ikke var Tilfældet kunde man vælge et Punkt i hver Sløjfe tilstrækkelig nær ved Dobbeltpunktet, og forbinde dem med en ret Linie; denne vilde da skære det endelige Liniestykke $O_1 O_2$. Men en saadan Linie vilde da skære Kurven i 6 Punkter (mindst), nemlig hver Sløjfe i to Punkter, og hver af de nævnte Buer i et Punkt (mindst), da hver af disse i Forbindelse med det endelige Liniestykke $O_1 O_2$ begrænser en endelig Del af Planen. Man begynder altsaa Konstruktionen med at tegne to Sløjfer med fremspringende Punkter i de to Dobbeltpunkter O_1 og O_2 beliggende paa samme Side af Linien $O_1 O_2$ saaledes, at hverken nogen af Tangenterne i et Dobbeltpunkt, eller nogen Tangent udgaaende fra et Dobbeltpunkt, eller endelig nogen Vendetangent skærer disse Sløjfer. Dernæst forbindes O_1 og O_2 med to Buer, der slutte sig fuldstændig kontinuert til Sløjferne, (hvilke to danne en uegentlig Sløjfe). Naar de to Røringspunkter mellem en Sløjfe (egentlig eller uegentlig) og de to Dobbelttangenter, der berøre denne, ere A og B, kunne Infleksionspar i ubegrænset Antal tilføjes paa den af A og B begrænsede Bue, der ikke indeholder noget Dobbeltpunkt. Disse skulle tilføjes paa den Maade, at ingen af Vendetangenterne skærer nogen anden Sløjfe end den, hvorpaa det tilhørende Infleksionspunkt ligger.

Der findes tre typiske Former, i det de to isolerede Infleksionspunkter enten kunne ligge paa hver sin egentlige Sløjfe, eller begge ligge paa den uegentlige Sløjfe, eller endelig det ene paa en egentlig og det andet paa den uegentlige Sløjfe.

I Fig 34 findes Formen svarende til det midterste Tilfælde. Dette er det interessanteste, da man ikke kan have flere end ét isoleret Vendepunkt paa en egentlig eller uegentlig Sløjfe, naar Dobbeltpunkternes Antal er større end to.

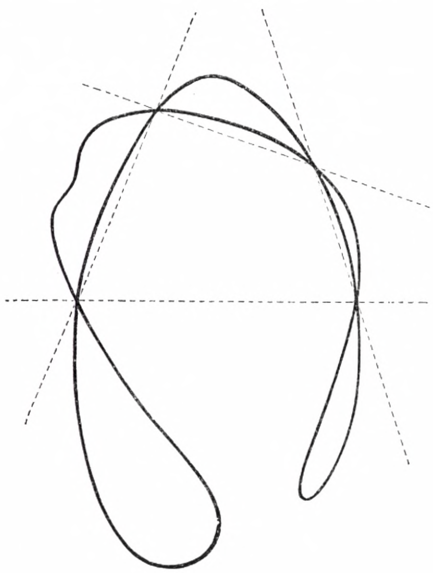

Fig. 35.

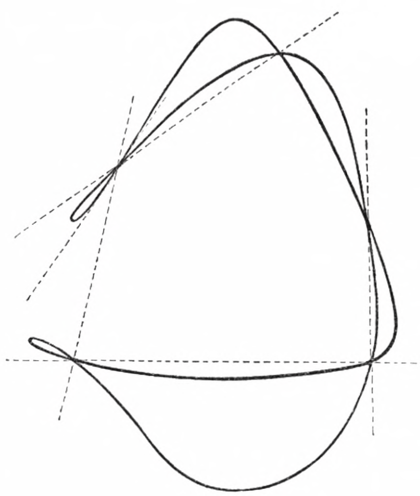

Fig. 36.

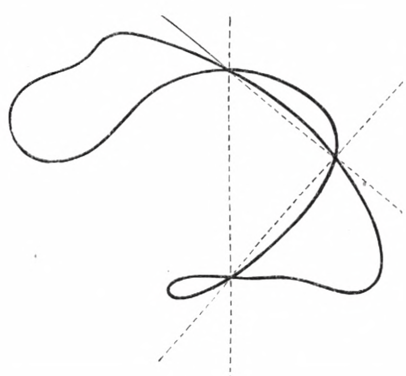

Fig. 37.

Formen af Kurven med flere end 2 Dobbeltpunkter karakteriseres væsentligt ved følgende Sætning:

Projiceres Kurven i det endelige, danne paa hinanden følgende Dobbeltpunkter Vinkelspidserne i en konveks Polygon, og hele Kurven ligger i de Trekanter, som dannes af en Polygonside og Forlængelsen af de to tilstødende Sider. (29)

Hvis den ved de paa hinanden følgende Dobbeltpunkter bestemte Polygon ikke var konveks, vilde der findes mindst én Side, der skærer en anden af Polygonens Sider. Hvis f. Ex. Linien $O_s O_t$ skærer Siden $O_r O_{r+1}$, kunde man vælge et Punkt P i (O_s) nær ved O_s og et Punkt O i (O_t) nær ved O_t, hvis Forbindelseslinie ogsaa skærer Siden $O_r O_{r+1}$, men Linien TO vilde da skære Kurven i flere end 4 Punkter; dette ses aldeles som ovenfor. Kurven kan endvidere ikke have noget Punkt indeni den endelige Polygon, thi drager man gjennem et saadant Punkt en Linie, der skærer to af Polygonens Sider, ser man som nys, at den vilde skære Kurven i flere end 4 Punkter. Men Kurvens egentlige og uegentlige Sløjfer kunne da kun ligge som i Sætningen angivet.

Man begynder Konstruktionen ved i én af Trekanterne, lad os sige den, hvor $O_1 O_n$ er Side, at tegne to Sløjfer, der have fremspringende Punkter dels i O_1 dels i O_n. Herved skal man blot tage Hensyn til de samme Indskrænkninger som ved Kurven med to Dobbeltpunkter. Tegningen af de uegentlige Sløjfer kan ikke give Anledning til nogen Tvivl, og Tilføjelsen af Infleksionspar sker ligeledes efter selvsamme Regel som ovenfor — baade paa en egentlig og paa en uegentlig Sløjfe; det er nemlig ved Afrunding let at vise, at de ovenfor nævnte Punkter A og B, ikke kunne skilles ved de to fremspringende Punkter paa en uegentlig Sløjfe.

Der findes tre Typer eftersom de to altid eksisterende isolerede Infleksionspunkter ligge enten paa hver sin egentlige Sløjfe, eller paa hver sin uegentlige (Nabo til en egentlig) eller endelig det ene Infleksionspunkt paa en egentlig, det andet paa en uegentlig Sløjfe. Det ovenstaaende beviser, at disse to Sløjfer ikke kunne være Naboer. Formerne findes Fig. 35, 36 og 37.

De Former, hvor der falde Infleksionspunkter i et Dobbeltpunkt, ere let overskuelige Overgangstilfælde.

Svinder en egentlig Sløjfe ind, faar man Former med en Spids, der ifølge det foregaaende er af 1ste eller af 2den Art, eftersom Sløjfen indeholder intet eller ét isoleret Infleksionspunkt. Der kan altsaa f. Ex findes Former med to Spidser af 2den Art og desuden et vilkaarligt stort Antal Dobbeltpunkter.

Svinder en uegentlig Sløjfe ind, faar man Former med Selvberøringspunkt. Af saadanne Punkter kan der findes et vilkaarlig stort Antal.

Introduction à l'étude des courbes graphiques

par

C. Juel.

§ 1. Introduction: principe graphique de correspondance.

Dans certaines parties de la géométrie auxquelles se rattache ce qui suit, un infiniment petit doit être considéré comme un suffisamment petit. On définira donc le point comme une aire infiniment petite, une courbe comme une ligne brisée à côtés infiniment petits. On pourra définir, d'après ce même ordre d'idées, les tangentes aux courbes, reconnaître qu'une correspondance est continue, etc. Il est vrai que dans cette hypothèse les éléments des figures ne sont pas exactement définis dans le sens ordinaire, mais cela n'infirme aucunement l'exactitude des considérations.

Par la suite nous aurons souvent à considérer des correspondances entre les points d'une ligne fermée; ces correspondances sont toujours supposées continues.

Si la correspondance est univoque, on a les deux théorèmes que voici.

(1) Dans une correspondance univoque on ne peut pas prendre tout à fait au hasard plus de trois paires de points correspondants.

En effet on ne peut pas prendre les points A_1, B_1, C_1, D_1, pour correspondants de A, B, C, D, si, ABC et ABD déterminant le même sens de la figure fermée, $A_1B_1C_1$ et $A_1B_1D_1$ déterminent des sens contraires.

(2) Si dans une correspondance univoque sur une ligne fermée les deux sens correspondants sont contraires, on aura toujours deux points correspondants qui se confondront et deux seulement.

Facile à démontrer, ce théorème rentre dans le suivant que nous appellerons, dans la suite, principe graphique de correspondance.

(3) Si sur une même ligne fermée on suppose entre des points X et Y une correspondance telle qu'à chaque point X correspondent q points Y et qu'à chaque point Y correspondent p points X $(p > q)$; si, en outre, deux points X (ou Y) correspondants à un même Y (ou X) ne peuvent jamais coïncider [hypothèses qui permettent déjà de reconnaître que chaque point X (ou Y) décrira un arc dans un sens déterminé si tel est le cas pour Y (ou X)]; si, troisièmement, les deux sens correspondants sont contraires, alors on aura $p + q$ points correspondants qui se confondront, dits points doubles.

Démonstration. On aura évidemment au moins un point double A. Supposons maintenant que le point X parcoure la courbe entière en partant de $A = X_0^1 = Y_0^1$, passant par les points Y_0^2, Y_0^3 .... Y_0^p qui correspondent à X_0^1 et se suivent dans cet ordre sur la courbe, et s'arrêtant finalement en A. A ce dernier moment les points du groupe Y occuperont les mêmes places qu'occupaient originellement les points de ce même groupe, leur ordre étant le même, mais un point Y ne se trouvera pas à sa place primitive. Or, puisqu'au point Y_0^p, comme à tout autre point fixe de la courbe, doivent correspondre q points X, il faut que les $q - 1$ points Y^1, Y^2, ..., Y^{q-1}, aient passé par ce point et non pas d'autres. X étant revenu en A, Y^{q-1} se confondra donc avec Y_0^p. L'acheminement du point X transformera donc le groupe des Y par la substitution.

$$\begin{pmatrix} Y_0^1, & Y_0^2, & \ldots Y_0^{q-1}, & Y_0^q, & \ldots Y_0^p, \\ Y_0^{p-q+2}, & Y_0^{p-q+3}, & \ldots Y_0^p, & Y_0^1, & \ldots Y_0^{p-q+1} \end{pmatrix}.$$

Ce tableau montre que le point X a rencontré deux fois chacun des points Y^1 Y^2 ... Y^q, y compris le point A, et une fois chacun des autres points Y^{q+1} ... Y^p.

Le nombre des points doubles sera donc

$$2q + p - q = p + q.$$

Le théorème reste encore vrai si, les autres conditions maintenues, un point Y demeure immobile pendant qu'un point correspondant parcourt un arc fini.

Ce théorème sera la base de presque tous nos raisonnements. Il nous servira surtout à définir par une méthode régulière toutes les formes possibles des courbes de quatrième ordre.

§ 2. Courbe de second ordre; arc élémentaire.

Nous allons nous occuper des courbes graphiques, c. à d., des courbes planes, tracées au crayon sur le papier, ou formées par des projections de différents arcs de ces courbes.

L'ordre d'une pareille courbe est le nombre maximum de points d'intersection avec une droite; sa classe est le nombre maximum de tangentes passant par un même point.

Une courbe de second ordre ne passe pas par plus de cinq points pris tout à fait arbitrairement. (1)

En joignant deux points fixes, mais arbitraires, de la courbe avec un point mobile, on aura deux faisceaux à correspondance univoque. Le théorème découle donc de § 1 (1).

Pour déterminer la courbe il faut en connaître tous les points.

Une courbe de second ordre est aussi de seconde classe. (2)

C'est une conséquence de notre principe appliqué à la correspondance entre les points X et Y en lesquels la courbe coupe les droites passant par un point fixe P. S'il passe deux tangentes par P, le point est extérieur à la courbe ou du côté positif de l'arc; dans l'autre cas, il est intérieur à la courbe ou du côté négatif de l'arc voisin.

Ce théorème est vrai, même quand la courbe a des points saillants, à tangentes différentes. En ce cas nous dénommons tangente impropre toute droite passant par un point A et infiniment rapprochée d'une droite qui couperait la courbe en deux points infiniment voisins de A. On regarde comme complètement continue toute courbe continue n'ayant ni point saillant ni segment rectiligne d'une longueur finie.

Citons encore le théorème suivant.

Si les points X et Y d'une G^2 sont en ligne droite avec un point P extérieur à la courbe, les tangentes en X et en Y se coupent en un point Z dont le lieu géométrique est coupé en un point unique par chaque droite ne coupant pas G^2.

Considérons maintenant deux courbes de second ordre et cherchons la relation entre les nombres de leurs points communs et tangentes communes, voir fig. 1 page 17.

En premier lieu nous supposerons que les deux courbes n'ont aucun point commun. Supposant en outre qu'elles aient au moins une tangente commune, il est facile de démontrer qu'elles en auront quatre. En effet, il est évident qu'on peut alors appliquer notre principe à la correspondance (2-2) formée par les points X et Y auxquels l'une des courbes est coupée par les tangentes à l'autre.

Si l'une des courbes est extérieure à l'autre il y a certainement quatre tangentes communes (et réciproquement).

Passons au cas où les deux courbes ont, ni plus ni moins, deux points communs. Comme on l'a fait remarquer il y aura certainement des tangentes communes. Il y a donc aussi des droites qui ne coupent ni l'une ni l'autre des courbes données et l'on pourra alors, sans diminuer la généralité des résultats, supposer les deux courbes tellement projetées qu'aucune ne s'étende à l'infini.

Imaginons maintenant que les deux courbes α et β soient partagées chacune en deux parties $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + \beta_2$ telles que α_1 est en dehors de β et β_1 extérieur à α_1, voir fig. 1 page 17. Alors le contour $\alpha_1 + \beta_2 = \lambda$ se trouvera en dehors d'une courbe β^4 formée par β_1 et le segment fini AB. Par un point arbitraire M de λ passent donc deux tangentes à β^4, t_1 et t_2 et nous allons considérer les deux points P_1 et P_2 auxquels λ est coupée par ces tangentes en dehors de M. Pour certaines positions de M sur λ ces tangentes pourront être impropres, c. à d. que ce seront des droites joignant M à A ou à B. En discutant la figure on montre que notre principe général peut s'appliquer à la correspondance (MP) qui, par conséquent, aura quatre points doubles. Mais deux de ces points se trouvent en A et B; α et β auront donc deux tangentes communes et pas plus. On peut réduire au cas précédent le cas général où les courbes ont et des points communs et des tangentes communes. Car, en considérant les arcs α_1, α_2 ... de α extérieurs à β, on trouve comme ci-dessus deux tangentes communes à β et à chacun des arcs α_1, α_2 ... On aura donc finalement

(4) Si deux courbes de second ordre n'ont aucun point commun, elles ont ou quatre tangentes communes ou aucune; si elles n'ont aucune tangente commune, elles ont quatre points communs ou aucun; dans tout autre cas les deux nombres sont égaux.

Dans ce qui suit nous entendrons par *arc élémentaire* un arc de courbe du second ordre et nous supposerons toutes nos courbes composées d'arcs élémentaires; ce qui revient à supposer ces lignes composées de parties de polygones convexes.

En joignant deux arcs élémentaires de manière qu'ils aient la même tangente au point commun, on aura les quatre formes représentées fig. 2 page 20. Il est facile d'en tirer les propositions connues relatives aux points singuliers, savoir, au point d'inflexion et aux deux points de rebroussement, les seuls qui puissent être représentés sur les courbes graphiques. Outre ces points nous considérons comme singularités les points doubles et les tangentes doubles.

Concernant les arcs élémentaires on a les théorèmes suivants, dont la démonstration découle d'une discussion directe de la correspondance entre un point arbitraire M de la courbe et les points P auxquels la courbe peut être coupée par la tangente en M.

Un arc AB sans singularités et qui n'est coupé par aucune droite en plus de deux points, est élémentaire. (5)

Un arc AB sans singularités et qui n'est coupé par aucune des tangentes en A et en B, est élémentaire. (6)

A ces théorèmes on pourra évidemment appliquer le principe de dualité.

Un arc AB sans singularités, qui n'est pas coupé par la tangente en A et auquel on ne peut mener aucune tangente par A, est élémentaire. (7)

D'après ce théorème il est facile de déterminer l'arc élémentaire maximum aboutissant à un point donné et s'étendant dans un sens déterminé sur une courbe donnée.

§ 3. Théorèmes généraux sur les courbes graphiques.

La notion de l'arc élémentaire permet de démontrer exactement la proposition suivante.

Une courbe fermée, parfaitement continue et sans aucune singularité, est nécessairement du second ordre (voir fig. 3 pag. 24). (1)

Ce qu'il faut démontrer, c'est que l'arc élémentaire σ qui part d'un point A de la courbe, finira en un point infiniment voisin de A. Dans le cas contraire supposons que l'arc se termine en un point B et qu'on ait choisi les dénominations de manière que la tangente en B passe par A. Si alors on joint σ à un segment déterminé $(AB)_0$ de la droite AB on déterminera une courbe de second ordre Γ et commencera par démontrer que les allongements de l'arc σ au delà de A et au delà de B tombent dans deux régions différentes séparées par Γ.

Alors, en discutant la figure on montre que la courbe donnée ne pourra pas traverser le segment $(AB)_0$ sans donner naissance à une singularité.

Il n'existe pas de courbes fermées et parfaitement continues qui, en fait de singularités, aient seulement, soit un point d'inflexion, soit un point de rebroussement, soit un point double, soit une tangente double. (2)

On démontre ce théorème en considérant la correspondance entre un point mobile M de la courbe et un point tangentiel P de M (P est tangentiel à M, si la tangente en M passe par le point P de la courbe).

Puisque les points d'intersection d'une courbe fermée et d'une droite mobile se présentent ou s'évanouissent par paires, on voit que

toute courbe fermée est coupée par chaque droite ou en un nombre pair ou en un nombre impair de points. (3)

Facile à démontrer, la proposition suivante est utile en beaucoup de cas.

Une courbe fermée et continue, qui n'est coupée par aucune de ses tangentes en plus de n points, n'est coupée par aucune droite en plus de $n+2$ points. (4)

(7) Le nombre des tangentes communes à une courbe C et à une courbe Γ de seconde classe qui ne coupe ni C ni les tangentes d'inflexion de C, sera 0 ou $2n$, si par un point de Γ passent n tangentes à C.

Ce théorème se déduit aisément de notre principe général de correspondance. Dans beaucoup de cas il ne sera pas nécessaire de supposer Γ de second ordre.

(5) L'ordre d'une courbe fermée et parfaitement continue et le nombre de ses inflexions sont tous les deux pairs ou tous deux impairs.

(6) Le nombre des intersections (simples) de deux courbes fermées est impair, si les ordres des courbes sont tous deux impairs; dans tout autre cas il est pair.

Ces deux théorèmes sont connus et se démontrent en remarquant que le nombre des tangentes issues d'un point P ne change pas si l'on fait parcourir au point P un chemin fermé quelconque.

Il va de soi qu'une courbe est d'ordre pair quand elle limite une région déterminée du plan. Mais la réciproque aussi est vraie.

(8) Une courbe fermée d'ordre pair et sans points doubles partage le plan en deux régions distinctes et deux seulement.

La démonstration se dédouble comme suit.

1) Si un chemin d'un point P à un autre point Q a un nombre impair de points de rencontre avec la courbe donnée C, il en sera de même pour tout chemin entre P et Q.

2) Si un chemin entre P et Q coupe C en un nombre pair de points, on pourra toujours trouver entre P et Q un autre chemin tel qu'il n'ait avec la courbe aucun point commun. Si la droite PQ coupe la courbe en A, B ... K, ledit chemin est composé des segments rectilignes PA, BC ... KQ combinés avec des arcs infiniment voisins des arcs AB, CD ... de la courbe donnée.

(9) Une courbe d'ordre impair, fermée et sans points doubles ne limite aucune région du plan.

Soient P et Q deux points arbitraires du plan et supposons que la droite PQ coupe la courbe donnée C en A et en K de manière que les segments PA et QK ne contiennent aucun point de la courbe, autres que A et K.

Alors le chemin composé des deux segments rectilignes PA et KQ et d'un arc infiniment voisin de l'un ou de l'autre des arcs AK de la courbe donnée, conduira de P à Q sans traverser la courbe, car ou l'un ou l'autre de ces deux arcs AK contiendra un nombre pair d'inflexions.

§ 4. Courbes de troisième ordre.

Considérons d'abord la courbe générale, c. à d. complètement continue, sans points doubles ni points de rebroussement.

(1) Par un point arbitraire M de la courbe générale G^3 passent deux tangentes à la courbe qui ont leurs points de contact en dehors de M.

La correspondance entre les points X et Y auxquels la courbe est coupée par les droites passant par M, est univoque: il y a donc ou deux tangentes passant par M

ou aucune; car, s'il y en a une, les points X et Y parcourent la courbe en sens inverses et l'on a précisement deux tangentes. Mais comme la courbe n'a pas de tangentes doubles et n'est coupée par aucune de ses tangentes d'inflexion, sinon au point de contact, le nombre cherché sera le même pour tous les points M et par un point infiniment voisin d'un point d'inflexion passe au moins une tangente; il y en a donc toujours deux.

Une courbe générale de 3e ordre a toujours trois inflexions. (2)

La correspondance entre un point mobile M de la courbe et son unique point tangentiel P est une correspondance (1, 2). Il y a donc, d'après notre principe général, trois inflexions certaines si les points M et P parcourent la courbe en sens contraires. Or, tel est le cas présent, comme on le voit immédiatement si l'on prend M voisin d'un point d'inflexion, (il y en a un au moins, puisque G^2 est d'ordre impair).

Le produit des rapports dans lesquels les côtés d'un polygone sont divisés par les points d'intersection avec une courbe fermée quelconque, est positif. (3)

Quoique ce théorème, facile à démontrer, soit d'une portée assez restreinte en comparaison du théorème (connu) de Carnot il suffit pour démontrer que les formes des courbes graphiques du 3e ordre complètement continues sont tout à fait analogues aux formes connues des courbes algébriques du même ordre.

Les courbes générales du 3ème ordre présentent deux types; celles du premier type sont de quatrième classe; les courbes du second type sont de la sixième classe. (5)

A chaque courbe G^3 du premier type on pourra toujours adjoindre une courbe de deuxième classe G^2 de manière que la courbe composée $G^2 + G^3$ soit de 3e ordre et de 6e classe. (6)

Cette distinction est tout à fait analogue à celle des courbes algébriques.

Dans la théorie des courbes de 3e ordre le théorème suivant est fondamental, car il donne la description complète et unique de la courbe.

Une courbe fermée et complètement continue, n'ayant d'autres singularités que trois points d'inflexion, est nécessairement de 3e ordre. (8)

La démonstration exacte de cette proposition exige un examen assez détaillé de la figure et se laisse mal condenser.

Une courbe de 3e ordre ayant un point double a un point d'inflexion et un seulement et elle est de 4e classe. Quand la courbe a un point de rebroussement, elle a aussi un point d'inflexion et elle est de 3e classe. (4)

De notre principe de correspondance on pourra facilement tirer divers théorèmes d'un caractère plus spécial, dont je cite le suivant.

Dans une G^3 on pourra inscrire deux polygones, ni plus ni moins, dont les côtés passent par des points donnés de la courbe, si le nombre des points est impair.

Si le nombre des points donnés est pair, il peut exister un nombre pair quelconque de polygones, zéro compris.

Passons à l'examen des courbes ayant des points saillants. Outre l'intérêt que ces courbes pourront présenter en elles-mêmes, il est nécessaire d'en connaître les formes pour la théorie des courbes du quatrième ordre.

Un point saillant à tangentes distinctes, peut avoir trois formes différentes, que représentent les figures 6, 7 et 8, page 37. Ces points seront désignés respectivement points saillants de 1ère, de 2de et de 3e espèce.

Les nouvelles formes se déduiront des formes connues des courbes générales par arrondissement des points saillants dans les courbes nouvelles.

On arrondit une courbe à l'endroit d'un point saillant en supprimant deux petits arcs OM_1 et OM_2 et y ajoutant un arc élémentaire σ suffisamment petit. On conçoit aisément cette opération en voyant les figures 6, 7 et 8. Cette déformation n'altère pas l'ordre de la courbe, comme on le démontre facilement. En outre, on verra que par cet arrondissement on ajoute à la courbe une ou deux inflexions ou aucune, selon que le point est de deuxième, première ou troisième espèce.

Quand on a arrondi tous les points saillants, la courbe est complètement continue et l'on peut alors appliquer les théorèmes déjà trouvés. On a donc:

(9) Une courbe de 3e ordre, complètement continue sauf en un point saillant, a une, deux ou trois inflexions selon que le point saillant est de 1ère, 2de ou 3e espèce.

Les propositions suivantes sont faciles à démontrer.

(10) Des deux tangentes en un point saillant, ou bien toutes deux coupent la courbe en dehors du point de contact, ou une seule la coupe, ou encore ni l'une ni l'autre ne le font, suivant que le point saillant est de 3e, 2de ou 1ère espèce.

Par un point saillant O passent 2 tangentes ou une seule ou aucune ayant le point de contact en dehors de O, selon que le point saillant est de troisième, de deuxième ou de première espèce.

Maintenant il est facile de préciser les formes possibles des courbes ayant un point saillant. Elles sont représentées figs. 9, 10 et 11, pag. 39.

Quant aux courbes ayant plusieurs points saillants, il vaut mieux laisser de côté les points de troisième espèce, car une courbe peut avoir de tels points un nombre tout à fait arbitraire.

L'arrondissement montre clairement que les seules formes possibles des courbes de troisième ordre ayant plusieurs points saillants de première ou de deuxième espèce, sont les trois formes données par les figures 12, 13 et 14, pag. 40. Ce sont

1) une courbe sans inflexion, ayant un point saillant de la première espèce et un de la seconde, fig. 12;

2) une courbe ayant deux points saillants de deuxième espèce et une inflexion, fig. 13;

3) une courbe sans inflexion, ayant trois points saillants de deuxième espèce, fig. 14.

Quand une courbe de troisième ordre a un point double, elle peut avoir encore un point saillant de deuxième espèce non situé sur la boucle, voir fig. 15, page 41. Dans ce cas aussi le nombre des points saillants de troisième espèce est tout à fait arbitraire.

§ 5. Courbes de quatrième ordre.

Les différences entre les courbes graphiques et les courbes algébriques s'accentuent déjà très nettement dans les courbes du quatrième ordre.

En premier lieu une courbe G^4 du quatrième ordre peut être composée d'un nombre illimité de branches, ce dernier mot étant pris dans le sens algébrique[1]. Prenons, par exemple, un nombre quelconque de points tels qu'on n'en puisse jamais trouver trois situés en ligne droite. Décrivons en suite des cercles suffisamment petits autour de ces points comme centres. Aucune droite n'aura plus de quatre points de rencontre avec cet ensemble de cercles. Il convient donc de se contenter des courbes qui ne peuvent pas se partager en plusieurs parties complètement continues.

De plus, outre le nombre des points de rebroussement, les nombres de singularités des courbes graphiques pourront croître au delà de toute limite. Il en est donc d'autant plus désirable de connaître une relation entre ces nombres. En voici une qui est unique.

Une courbe du quatrième ordre n'a pas nécessairement des tangentes doubles; mais s'il y en a, leur nombre est égal au nombre des points doubles augmenté de la moitié du nombre des points d'inflexion. (10)

Nous établirons cette relation pour chacun des types suivants.

En premier lieu, déterminons la forme d'une courbe G^4 sans point double. On a:

Les deux points de contact d'une tangente double avec une G^4 sans points doubles, limitent un arc contenant deux points d'inflexion et deux seulement. (2)

Cette proposition est assez évidente et une démonstration exacte entraînerait à des longueurs; voir fig. 16, pag. 43. Ensuite nous appellerons arc interne l'arc défini en (2); la tangente double correspondante, tangente double de première espèce, et couple d'inflexion les deux points d'inflexion.

Cela nous permet d'énoncer comme suit le théorème inverse de (2):

Toutes les tangentes doubles d'une G^4 générale sans points doubles sont de la première espèce et tous ses points d'inflexion appartiennent à des couples d'inflexion: voir fig. 17, pag. 45. (3)

Ce théorème démontré, il est facile d'indiquer la construction générale d'une G^4 sans points doubles. On commence simplement par une courbe Γ du second ordre et remplace des cordes de cette courbe (qui ne se coupent pas) par des arcs internes convenablement choisis.

Quant aux courbes ayant des points doubles, elles peuvent avoir des tangentes doubles qui ne sont pas de la première espèce, et des points d'inflexion qui ne font pas partie de couples d'inflexion. Un tel point d'inflexion s'appelle point d'inflexion isolé.

Par un point double O d'une G^4 passent ou deux tangentes ayant leur point de contact en dehors de O ou aucune. (4)

Ce théorème se déduit du principe de correspondance appliqué aux points d'intersection de la courbe avec des droites passant par O.

---

[1]) Dans la suite nous nous servirons de ce mot dans un sens différent, voir page 84.

Un point double par lequel ne passe aucune tangente est dit point double de la première espèce; en cas contraire ce point est de deuxième espèce.

Dans le théorème ci-dessus chaque droite passant par un point de rebroussement est à considérer comme tangente. Il en résulte donc ceci

(1) [1] Aucune G^4 ne peut avoir plus de trois points de rebroussement.

(5) Tous les points doubles d'une G^4 sont de même espèce, sauf le cas où il y a trois points doubles; auquel cas les points doubles ne sont pas nécessairement de la même espèce.

Ce théorème se déduit de notre principe appliqué à la correspondance entre les points d'intersection M_1 et M_2, différents de M, de la courbe avec les droites O_1M, O_2M où O_1 et O_2 sont deux points doubles d'espèces différentes, et M un point variable de la courbe.

Les courbes ayant trois points doubles ont rang à part dans la théorie.

Pour étudier une courbe présentant un point double il est souvent utile de la considérer comme composée de deux branches communiquant au point double. On dit alors que ces deux branches sont correspondantes du point double. Voici comment on divise la courbe. On y fait cheminer un point à partir du point double et quand ce point mobile sera revenu pour la première fois au point double, il aura décrit l'une des branches. L'autre branche se définit de la même manière.

Si la courbe à considérer présente plusieurs points doubles, la division en branches peut s'effectuer, comme ci-dessus, à partir de chacun de ces points doubles.

Cette méthode ne conduit pas à une division unique, si les tangentes à un des points doubles coïncident. On ramène aisément ce cas à l'autre en déformant tant soit peu la courbe.

Chaque branche est une courbe parfaitement continue sauf en un point saillant et elle est du second, du troisième ou du quatrième ordre. Est-elle du 3e ordre, nous avons une branche impaire; sinon, une branche paire. Il n'est pas nécessaire que les choses se passent de la même manière aux différents points doubles.

Considérons actuellement les courbes G^4 qui, par rapport à l'un de leurs points doubles, peuvent se diviser en deux branches impaires. Toutes ces courbes seront du troisième type d'après notre classification [2].

(11) Une courbe G^4 du troisième type aura ou deux ou trois points doubles.

Si l'on arrondit les deux branches G_1 et G_2 au point O auquel elles appartiennent, on obtient deux courbes de troisième ordre, complètement continues et se coupant mutuellement en un point au moins; mais elles ne pourront pas avoir d'autre point d'intersection.

En effet, soit dans ce cas O et O_1 les deux points d'intersection; la droite OO_1 couperait alors la courbe complète $G_1 + G_2$ en six points, ce qui est contre l'hypothèse.

Cependant, un troisième point double peut apparaître, si l'une des branches, mais une seulement, a elle-même un point double.

---

[1] Les numéros des théorèmes sont ceux du texte danois.

[2] Dans ce résumé j'ai préféré intervertir l'ordre des matières et mettre les courbes du troisième type avant celles du deuxième.

Une G^4 du troisième type à deux points doubles aura, en outre, quatre points d'inflexion isolés et elle n'aura pas d'autres singularités. (12)

Ces courbes se composent de deux branches dont on voit les formes, figures 21, 23 et 24, page 56. Comme le point double auquel appartiennent les branches, est ou bien un point saillant de la deuxième espèce sur les deux branches, ou bien un point saillant de première espèce sur l'une de ces branches et de troisième espèce sur l'autre branche, le théorème (9) § 4 nous montre que les deux branches auront en tout quatre points d'inflexion.

Une G^4 composée de deux branches impaires ne peut pas avoir de tangente double, car celle-ci couperait la courbe en six points.

Les seules formes possibles sont donc représentées par les figures 21, 22 et 23, page 56, provenant de la fusion des formes indiquées figs. 9, 10 et 11, page 39.

Le cas spécial où un point double est en même temps un point d'inflexion, doit être considéré à part, tant ici que dans la suite.

Une G^4 du troisième type, à trois points doubles, aura deux points d'inflexion isolés et ne présentera pas d'autres singularités. (13)

On le montre comme ci-dessus.

Dans la recherche des formes il y a deux cas à considérer. Un point double est situé ou bien sur une boucle de la courbe composante de troisième ordre ou sur une branche impaire de cette même courbe.

La discussion nous montre que les formes différentes (dans le sens projectif) sont exclusivement les cinq représentées figs. 24, 25, 26, page 58, et figures 27, 28, page 59.

Ayant maintenant épuisé toutes les courbes de quatrième ordre composées de deux branches impaires, il ne nous reste que les courbes dont toutes les branches sont paires.

En examinant, par ex., les figures 24 et 27, on voit que les points doubles des courbes du troisième type ne sont pas nécessairement de la même espèce. Pour les courbes en question nous avons au contraire le théorème suivant:

Tous les points doubles d'une courbe de quatrième ordre dont toutes les branches sont paires, sont nécessairement de la même espèce. (14)

D'après le théorème (5) il suffit de considérer le cas où la courbe n'a que trois points doubles.

Soient G_1 et G_2 les deux branches appartenant à un point double A d'espèce arbitraire, soit B un autre point double de la première espèce et C un point double de deuxième espèce.

Le point B doit être ou un point double sur l'une des branches, soit sur G_1, ou un point d'intersection entre G_1 et G_2. Mais nous pourrons démontrer que le premier cas est impossible. B étant de première espèce, aucune tangente à G_2 ne passe par B; donc toute droite passant par B coupera la courbe G_2 au même nombre de points et, dans le cas présent où G_2 est paire, ce nombre doit être égal à deux; mais la tangente t à G_1 en B, y couperait G_1 en trois points qui se confondraient si B était un point double sur G_1, et la courbe $G_1 + G_2$ en cinq points au moins, ce qui est impossible. Mais le troisième point double C doit de même être un point d'intersection avec G_1 et G_2, car autrement la droite BC couperait $G_1 + G_2$ en six points au moins, ce qui est contre l'hypothèse.

Mais C est de deuxième espèce: par C passe donc une tangente ayant son point de contact avec, par ex., G_1 en dehors de C; cette droite couperait alors la courbe $G_1 + G_2$ en cinq points au moins, ce qui est encore impossible.

Dans ce qui suit nous avons donc à nous occuper uniquement des courbes dont les branches sont paires et dont tous les points doubles sont de même espèce. Si tous ces points sont de première espèce, on a les courbes que nous avons classées dans le deuxième type.

(6) Une courbe G^4 du deuxième type a autant de tangentes doubles de la deuxième espèce que de points doubles et, en outre, un nombre arbitraire de tangentes doubles de première espèce avec leurs couples d'inflexion correspondants, voir fig. 18, pag. 49, et fig. 19, pag. 51.

Si, en un point double O, on divise la courbe en deux branches G_1 et G_2, il suit de la démonstration du théorème précédent, que tous les autres points doubles seront des points d'intersection entre G_1 et G_2, ces dernières étant alors sans points doubles.

En outre, il est aisé de démontrer que les deux tangentes au point O couperont toutes deux une des deux branches appartenant à O et la même branche. Celle que coupent les deux tangentes est dite branche extérieure; l'autre est la branche intérieure. Alors on verra que le point O sera saillant de la première espèce sur la branche extérieure et de la troisième espèce sur la branche intérieure. Connaissant alors la déformation causée dans les deux branches par un arrondissement en O, on voit que le théorème est une conséquence du théorème fondamental (3) des courbes générales sans point double.

Le dénombrement direct montre maintenant que la relation (10) entre les singularités est justifiée pour les courbes du deuxième type.

Quant à la forme des courbes, celles qui ont un point double unique, sont à considérer à part. Dans ce cas la forme ne différera pas essentiellement, sauf les couples d'inflexion, de la forme connue d'une cardoïde de Pascal; voir figure 18, page 49.

On obtient toutes les courbes de quatrième ordre et du deuxième type ayant plusieurs points doubles, par la construction suivante qui est tout à fait générale: voir figure 19, page 51.

Sur une courbe Γ de second ordre on prend $4n+2$ points $A, B, A_1, B_1, \ldots, A_{2n}, B_{2n}$ se succédant dans cet ordre sur Γ. On trace alors la courbe G^4 de B_{2n} à A le long de Γ; puis de A à B_1 le long d'un arc élémentaire; puis de B_1 à A_2 le long de Γ, etc., de manière que la courbe tracée soit partout complètement continue. Sur les arcs $B_{2n}A$, $B_1A_2 \ldots$ de G^4 qui font partie de Γ, on peut ajouter des couples d'inflexion convenablement choisis en nombre arbitraire. De la construction même on déduit que

(7) Le nombre des points doubles d'une courbe du deuxième type est toujours impair.

Les formes des courbes qui ont des points de rebroussement, se déduisent des formes plus générales en déformant un peu la figure, artifice suffisamment expliqué par la figure 20, page 54.

(9) On voit par le théorème (4) qu'une courbe du deuxième type aura, au plus, un point de rebroussement et que, dans ce cas, la courbe ne peut avoir aucun point double.

Sans infirmer la généralité, on peut toujours, à l'aide d'une transformation projective, faire en sorte que la courbe soit toute entière à distance finie.

Il ne reste plus que les courbes dont toutes les branches sont paires et dont tous les points doubles sont de la deuxième espèce. Dans notre classification, ces courbes sont du quatrième type.

La différence la plus caractéristique et manifeste entre ces courbes et celles du type précèdent consiste en ce que dans l'un et l'autre cas les points doubles jouent des rôles différents par rapport à deux branches complémentaires. Partageons une courbe du type considéré en deux branches complémentaires G_1 et G_2; alors chaque point double de $G_1 + G_2$, outre le point O correspondant, sera un point double soit de G_1 soit de G_2 et, à part ces points, G_1 et G_2 ne se rencontreront qu'au point O. En effet, dans le cas contraire, par un point d'intersection de G_1 avec G_2 passerait une tangente à la courbe qui couperait celle-ci en plus de quatre points. (Dans les courbes du type précédent, toute branche était sans point double.)

En outre, ces courbes auront toujours des b o u c l e s, ce qui n'est généralement pas le cas pour les types précédents. Par boucle on entend une branche ne contenant pas d'autre point double que celui auquel elle appartient.

P a r u n p o i n t d o u b l e n e p a s s e q u ' u n e s e u l e t a n g e n t e à t o u t e b o u c l e q u i n ' a p p a r t i e n t p a s à O. (15)

Pour démontrer ce théorème on considère la correspondance entre les points d'intersection de la boucle (O_1) avec des droites passant par O. Dans cette correspondance il y aura deux points correspondants qui se confondront et l'un de ces points sera le point O_1. En effet, la droite OO_1 sera, comme on le prouve aisément, une tangente impropre à (O_1).

U n e c o u r b e d e q u a t r i è m e o r d r e a t r o i s b o u c l e s a u p l u s. (16)

Pour les courbes du quatrième type, ce théorème résulte de la proposition précédente combinée avec le théorème (4); un coup d'œil sur les types précédents convaincra que le fait est général.

U n e c o u r b e G^4 d u q u a t r i è m e t y p e a u r a d e u x b o u c l e s a u m o i n s. (17)

Si la courbe n'a qu'un point double, le théorème est évident. S'il y en a plusieurs, faisons parcourir au point M l'une des branches, soit G_1, appartenant au point double O. Si G_1 n'est pas une boucle, le point mobile aura passé deux fois par un autre point double. Il en résulte que le nombre des points doubles situés sur une des branches appartenant à O_1 sera au plus égal au nombre des points doubles de G_1, moins un. En continuant de la sorte avec G_1 et G_2 on obtient au moins deux boucles.

D e u x b o u c l e s (O_1) e t (O_2) a p p a r t e n a n t à d i f f é r e n t s p o i n t s d o u b l e s, n ' a u r o n t q u ' u n e t a n g e n t e c o m m u n e. (18)

Il est aisé de démontrer que par chaque point M de (O_1) passe une seule tangente (propre) à (O_2) et l'on pourra alors appliquer notre principe à la correspondance entre les points M et P auxquels (O_1) est coupé par une tangente à (O_2). Il y aura donc deux points correspondants qui se confondront, mais l'un d'eux correspondra à une tangente à (O_2) passant par O_1.

S i p a r u n p o i n t d o u b l e O p a s s e n t u n e o u d e u x t a n g e n t e s à l ' u n e (19) des deux branches correspondant à O, ou s'il n'y passe aucune tangente, cette même branche sera coupée en dehors de O par une ou deux tangentes en O ou par aucune.

C'est ce que résulte de la discussion de la figure.

(20) Deux branches complémentaires auront toujours deux tangentes communes et deux seulement.

Pour démontrer cette proposition, il faut d'abord établir que par chaque point de l'une des branches G_1 il passe toujours deux tangentes à l'autre branche G_2, y compris les tangentes impropres éventuelles. Puis on prouvera aisément que, chose assez curieuse, notre principe s'applique à la correspondance entre les points d'intersection de G_1 avec les tangentes à G_2. On trouve ainsi quatre points correspondants qui se confondent; mais deux de ces points correspondent aux tangentes issues de O. Il y aura donc seulement deux tangentes propres communes.

(21) Sur une boucle il y a une ou deux inflexions isolées ou aucune, selon que par le point saillant de la boucle passent une ou deux tangentes à la boucle ou aucune.

On le montre en arrondissant le point saillant.

Nous voici à même de classer toutes les formes des courbes du quatrième type, qui comprend deux sous-types, suivant que la courbe a trois boucles ou deux seulement.

(22) Une courbe de quatrième ordre à trois boucles a, en fait de singularités, trois points doubles, trois tangentes doubles de deuxième espèce et, en outre, un nombre arbitraire de tangentes doubles de première espèce avec les inflexions correspondantes et celles-ci seront toutes situées sur les boucles.

Un quatrième point double est impossible d'après les théorèmes (4) et (15). Les tangentes doubles de deuxième espèce seront les tangentes communes à deux boucles (voir (18)) et il n'y en a pas d'autres d'après (20). De plus le théorème (21) nous montre qu'il n'y a d'inflexion isolée sur aucune des boucles. Ayant démontré que dans chacune des boucles le point double sera un point saillant de troisième espèce, on n'aura pas de peine à prouver que la courbe se compose de trois boucles et de trois arcs élémentaires. Alors le théorème devient évident et la forme de la courbe est arrêtée, voir fig. 30, page 67.

Si le nombre de couples d'inflexion est r, le nombre des tangentes doubles sera $r+3$, le nombre d'inflexions $2r$ et le nombre des points doubles 3. La relation (10) est donc justifiée.

Les boucles pourront s'évanouir et donner naissance à des points de rebroussement. Par suite

(23) Quand une courbe G^4 a son nombre maximum de points de rebroussement, ils sont tous de première espèce et la courbe n'aura pas d'autre singularité.

Une courbe de quatrième ordre ne peut avoir qu'un point triple. Sauf un nombre arbitraire de couples d'inflexion, les seules formes possibles sont les deux que représentent les figures 29, page 60, et 31, page 69.

Quant aux courbes à deux boucles, il faut considérer à part les formes n'ayant qu'un seul point double.

Une courbe de quatrième ordre à point double unique de deuxième espèce, aura, outre les couples d'inflexion et les tangentes doubles correspondantes, deux inflexions isolées et deux tangentes doubles de deuxième espèce. (24)

C'est là une conséquence des théorèmes (19) og (20).

Sauf les couples d'inflexion, les seules formes seront donc les deux que représentent figures 32, 33, page 69. Ce qui les distingue entre elles, c'est que les deux points d'inflexion isolés, figure 32, sont situés tous les deux sur une même boucle et, figure 33, chacun sur sa boucle.

On voit immédiatement que la relation générale (10) est justifiée.

Reste encore à considérer les courbes à deux boucles et à plusieurs points doubles.

Soient $O_1, O_2, \ldots, O_n$ les points doubles se succédant dans cet ordre sur un arc déterminé $(O_1 O_n)$ de la courbe. Faisant une nomenclature distincte de la précédente, nous appellerons (O_1) et (O_{n+1}) les deux boucles en question.

Si maintenant on détache de la courbe donnée la boucle (O_1), il reste, pour $n > 2$, une courbe du quatrième type qui aura, comme la courbe primitive, deux boucles, dont l'une est (O_{n+1}); l'autre sera une boucle (O_2) à deux points saillants et que nous dirons impropre. En poursuivant ainsi, l'on voit que la courbe peut être regardée comme composée de $n+1$ boucles, dont deux seront propres (ayant un seul point saillant) et les autres impropres. Nous disons que (O_1) appartient à O_1, (O_2) à O_2 et ainsi de suite.

Dès lors on n'a pas de peine à démontrer que

Une droite joignant deux points doubles sera une tangente impropre à chacune des boucles appartenant à ces points. (25)

Un point double sera un point saillant de deuxième espèce sur chacune des boucles impropres, sauf dans le cas où le point double est également situé sur une boucle propre, car alors le point sera saillant ou de deuxième espèce ou de première. (26)

Une courbe de quatrième ordre à deux boucles, aura toujours, ni plus ni moins, deux points d'inflexion isolés, situés sur les boucles soit propres, soit impropres et voisines des propres. Aucune boucle, tant propre qu'impropre, ne peut contenir plus d'un seul point d'inflexion isolé, sinon $n = 2$. (27)

On démontre ce dernier théorème en détachant de la courbe toutes les boucles excepté (O_1) et (O_2). Si l'on arrondit ensuite le point saillant en O_2, on obtient une courbe de même type à un seul point double. Alors on combine la boucle (O_2) avec la suivante (O_3); on arrondit en O_1 et en O_3 etc.; enfin on applique à toutes ces courbes les théorèmes (24) et (26) et l'on en tire le théorème susdit.

Une courbe G^4 à deux boucles et à plusieurs points doubles, n'aura pas d'autres tangentes doubles de la deuxième espèce que la tangente commune aux deux boucles propres et les tangentes doubles ayant leurs points de contact sur deux boucles voisines. A chaque paire de boucles voisines correspond une seule de ces tangentes doubles. (28)

Ce théorème se démontre comme le précédent.

Considérons la courbe formée de deux boucles voisines (O_s) et (O_{s+1}) et arrondissons les points saillants en O_{s-1} et O_{s+1}.

Alors on a une G^4 du même type à un point double, qui aura deux tangentes doubles de la deuxième espèce. Mais si l'on supprime l'arrondissement, l'une de ces tangentes doubles disparaîtra en coïncidant avec la droite $O_{s-1} O_{s+1}$: voir (25). Il n'y a pas d'autres tangentes doubles de la deuxième espèce que celles trouvées de la manière indiquée. C'est ce qui résulte du théorème (20).

Si la courbe a n points doubles et r couples d'inflexion, le nombre total des tangentes doubles sera, d'après ce théorème, $r+n+1$, tandis que le nombre d'inflexions sera $2r+2$, d'après (27). La relation (10) est donc aussi justifiée par les nombres de singularités des courbes de ce dernier type.

Quant aux formes des courbes, celles qui ont deux points doubles sont à considérer à part.

On a trois formes différentes suivant que les deux points d'inflexion isolés sont situés ou tous deux sur la boucle impropre, ou bien l'un sur celle-ci, l'autre sur une boucle propre, ou enfin un des deux points d'inflexion isolés sur chacune des boucles propres.

De ces courbes dont les formes ne diffèrent pas beaucoup entre elles, on ne donne que la première en figure 34, page 73, car elle contient le cas le plus intéressant, comme représentant la seule courbe du quatrième ordre qui ait deux points d'inflexion isolés situés sur une même boucle.

Pour tracer les courbes à n points doubles où $n > 2$, on se sert du théorème suivant.

Si l'on a projeté la courbe de manière à ce qu'elle ne s'étende pas à l'infini, ce qui est toujours possible, les points doubles consécutifs formeront un polygone convexe et toute la courbe sera située dans les triangles formés par un côté du polygone et les prolongements des deux côtés voisins.

Voilà donc bien définie la manière de tracer les courbes dont les formes, différentes d'après notre système de classification, sont données figs. 35, 36 et 37, page 74, pour $n = 4, 5, 3$.

Nous ajouterons que les courbes à points de rebroussement, voir figure 20, page 54, sont comprises, comme cas limites, dans les formes plus générales.

On voit aussi qu'aucune courbe de quatrième ordre ne peut avoir plus de deux points de rebroussement de deuxième espèce.

Mais elle pourrait avoir un nombre arbitraire de points d'embrassement.